

E Heppner

Frankfurt am Main 1974

Primzahl-unabhängige multiplikative Funktionen

Inaugural - Dissertation

zur

Erlangung des Doktorgrades

der Naturwissenschaften

vorgelegt dem Fachbereich Mathematik

der Johann Wolfgang Goethe - Universität

in Frankfurt am Main

von Ernst Heppner

aus Offenbach

Frankfurt am Main 1973

Gedruckt mit Genehmigung des Fachbereichs
Mathematik der Johann Wolfgang Goethe -
Universität Frankfurt am Main.

Dekan : Prof. Dr. H. Kerner

1. Berichterstatter : Prof. Dr. W. Schwarz

2. Berichterstatter : Prof. Dr. W. Franz

Tag der mündlichen Prüfung : 19. Februar 1974



Inhaltsverzeichnis

Bezeichnungen	iv
§ 1 Einleitung	1
§ 2 Die maximale Größenordnung	8
§ 3 Eine Anwendung der Beweismethode aus §2 auf nicht primzahl-unab- hängige Funktionen	21
§ 4 Die maximale Größenordnung bei zusätzlichen Voraussetzungen an N	35
§ 5 Anwendung der Ergebnisse aus §4 auf gewisse nicht primzahl-unab- hängige Funktionen	43
§ 6 Bemerkung über die Mittelwerte primzahl-unabhängiger Funktionen	48
§ 7 Die maximale Größenordnung bei der Iteration primzahl-unab- hängiger Funktionen	53
§ 8 Mittelwerte bei der Iteration primzahl-unabhängiger Funktionen	66
Literaturverzeichnis	81

Digitized by the Internet Archive
in 2026

Bezeichnungen

Mit c, c' usw. bezeichnen wir positive Konstanten (nicht immer die gleiche an verschiedenen Stellen). ε ist stets eine kleine positive Zahl. p und q sind Primzahlen.

Es werden folgende Funktionen verwendet :

$$d(N) = \sum_{t|N} 1,$$

$$d_k(N) = \sum_{t|N} d_{k-1}(t) \text{ für } k \geq 2,$$

$$\sigma_\alpha(N) = \sum_{t|N} t^\alpha,$$

$A(N)$ = Anzahl der nicht isomorphen abelschen Gruppen der Ordnung N ,

$r(N)$ = Anzahl der Darstellungen von N als Summe zweier Quadrate von ganzen Zahlen,

$$\omega(N) = \sum_{p|N} 1,$$

$\rho(N) = \sum_{i=1}^r \alpha_i$ für ein N mit der Primzerlegung

$$N = \prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i}$$

$\text{li } x$ = Integrallogarithmus von x

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_1^{1-\varepsilon} \frac{du}{\log u} + \int_{1+\varepsilon}^x \frac{du}{\log u} \right),$$

$$\mathcal{J}(x) = \sum_{p \leq x} \log p,$$

$$\mathcal{J}_P(x) = \sum_{\substack{p \leq x \\ p \in P}} \log p,$$

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1, \text{ und}$$

$$\pi_P(x) = \sum_{\substack{p \leq x \\ p \in P}} 1, \text{ wobei } P \text{ jeweils eine Menge von}$$

Primzahlen bezeichnet.

§ 1 Einleitung

Wir werden uns in dieser Arbeit mit primzahl - unabhängigen multiplikativen Funktionen beschäftigen. Dabei nennen wir eine multiplikative Funktion $F : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ primzahl-unabhängig, wenn $F(p^\alpha)$ nur von α (und nicht von der Primzahl p) abhängt.

Im §2 soll zunächst die maximale Größenordnung solcher Funktionen untersucht werden, das heißt wir wollen möglichst scharfe obere Abschätzungen für $|F(N)|$ herleiten.

Für einige spezielle Funktionen sind hier schon Ergebnisse bekannt. So zeigte S. Ramanujan 1915 [10] :

$$\log d(N) \leq \log 2 \operatorname{li}(\log N) + O(\log N \exp(-c \sqrt{\log \log N})).$$

Das Gleichheitszeichen steht für unendlich viele N .

Für $A(N)$, die Anzahl der nicht isomorphen abelschen Gruppen der Ordnung N , bewiesen W. Schwarz und E. Wirsing 1973 [14] :

$$\log A(N) \leq \log 5 \pi(B) + O((\log N)^{0,998}),$$

wobei B die kleinste ganze Zahl mit $4 \mathfrak{J}(B) \geq \log N$ bezeichnet. Es gibt unendlich viele N , für die $\log A(N) \geq \log 5 \pi(B)$ ist.

Ein allgemeineres Ergebnis von A.A. Drozdovoi und G.A. Freiman findet man in dem Buch von A.G. Postnikov [8] :

Ist F eine multiplikative Funktion mit

(i) $F(p^\alpha) = f(\alpha)$, $f(\alpha) > 0$ und

(ii) $\log(f(\alpha+1)/f(\alpha)) = O(1/\alpha)$,

so gilt

$$\log F(N) \leq \sup_{m \geq 1} \frac{\log f(m)}{m} \frac{\log N}{\log \log N} + O\left(\frac{\log N}{(\log \log N)^2} \log \log \log N\right).$$

Hier stört neben dem schlechten Restglied vor allem die sehr einschränkende Voraussetzung (ii), die zum Beispiel für die Funktion $A(N)$ nicht erfüllt ist.

All diese Ergebnisse werden wir aus unserem Satz 2.1 herleiten können. Für Anwendungen am besten geeignet erscheint aber der

Satz 2.3. Ist F eine multiplikative Funktion mit

(i) $F(p^\alpha) = f(\alpha)$,

(ii) $f(\alpha) \geq 1$ und es gibt ein β mit $f(\beta) > 1$ und

(iii) $\log f(\alpha) = o(\alpha/\log \alpha)$,

so ist

$$\log F(N) \leq \log f(A_1) \operatorname{li}\left(\frac{\log N}{A_1}\right) + O(\log N \exp(-c\sqrt{\log \log N})).$$

Für unendlich viele N gilt das Gleichheitszeichen. Dabei ist A_1 die eindeutig bestimmte

natürliche Zahl, für die $g(A_1) \geq g(a)$ für alle $a \leq A_1$ und $g(A_1) > g(a)$ für alle $a > A_1$ ist, wobei

$$g(a) = \min_{0 \leq b < a} \left\{ \frac{f(a)}{f(b)} \right\}^{\frac{1}{a-b}} \text{ ist.}$$

Ein zu Satz 2.1 analoges Ergebnis läßt sich auch für allgemeinere multiplikative Funktionen formulieren (Satz 3.1). Doch bereitet hier die Anwendung auf konkrete Beispiele einige Schwierigkeiten. Wir werden dies für die Funktionen $\sigma_\alpha(N) = \sum_{d|N} d^\alpha$ genauer betrachten (Satz 3.3).

Im §4 beschäftigen wir uns mit der Frage, ob sich schärfere obere Abschätzungen für $F(N)$ angeben lassen, wenn man an die Zahl N noch gewisse Bedingungen stellt. Ein typisches Ergebnis ist

Satz 4.3b. Die Funktion F erfülle die Voraussetzungen von Satz 2.3. Weiter sei P eine Menge von Primzahlen mit

$$\mathcal{V}_P(x) \sim c_1 x, \quad c_1 > 0.$$

Dann gilt für alle natürlichen Zahlen N , die nur Primteiler aus P besitzen,

die Ungleichung

$$\log F(N) \leq \frac{\log f(A_1)}{A_1} \frac{\log N}{\log \log N} \left(1 + \frac{1 + \log(c A_1)}{\log \log^2 N} + o\left(\frac{1}{\log \log N}\right)\right).$$

Für unendlich viele solche N steht das Gleichheitszeichen.

Mit den Ergebnissen von §4 können wir im §5 die Resultate aus §2 auf gewisse nicht primzahl-unabhängige Funktionen ausdehnen, und zwar ersetzen wir die Voraussetzung $F(p^\alpha) = f(\alpha)$ durch :

Es gibt endlich viele disjunkte Teilmengen

P_i der Menge P aller Primzahlen mit

- (i) $\bigcup_{i=1}^n P_i = P,$
- (ii) $\pi_{P_i}(x) = a_i \operatorname{li}(x) + O(x \exp(-c \sqrt{\log x})),$
- $a_i > 0,$ und
- (iii) $F(p^\alpha) = f_i(\alpha)$ für $p \in P_i.$

Als Beispiel betrachten wir die Funktion $r(N)$, die Anzahl der Darstellungen von N als Summe von zwei Quadraten.

Nachdem wir in den ersten Paragraphen die maximale Größenordnung primzahl-unabhängiger multiplikativer Funktionen untersucht haben, beschäftigen wir uns im §6 mit der mittleren Größenordnung solcher Funktionen, das heißt

wir betrachten $\sum_{n \leq x} F(n)$. Über solche Summen findet man schon zahlreiche Ergebnisse in der Literatur, so daß wir uns hier auf zwei einfache Bemerkungen beschränken wollen. Aus einem Satz von E. Wirsing folgt leicht

Korollar 6.2. Ist F eine multiplikative

Funktion mit

- (i) $F(n) \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$,
- (ii) $F(p^\alpha) = O(c_2^\alpha)$ mit einem $c_2 < 2$
für $\alpha = 2, 3, \dots$ und
- (iii) $F(p) = a$ konstant,

so gilt

$$\sum_{n \leq x} F(n) \sim c_3 x (\log x)^{a-1}.$$

Aus den bekannten Ergebnissen über $\sum_{n \leq x} d_k(n)$ lassen sich auch asymptotische Formeln mit Restglied für $\sum_{n \leq x} F(n)$ herleiten, falls $a \in \mathbb{N}$ ist (Satz 6.4).

Im zweiten Teil der Arbeit untersuchen wir die Hintereinanderausführung zweier primzahl-unabhängiger multiplikativer Funktionen. Wir beginnen im §7 wieder mit der maximalen Größenordnung. An einigen Beispielen zeigen wir zunächst, daß man hier keine einheitlichen Ergebnisse (wie im §2) für alle primzahl-unabhängigen Funktionen erwarten kann. Wir

beschäftigen uns schließlich genauer mit dem Fall, daß die innere Funktion die Teilerfunktion ist, und zeigen

Satz 7.1. Ist F eine multiplikative Funktion mit

$$(i) \quad F(p^\alpha) = f(\alpha),$$

$$(ii) \quad f(\alpha) \geq 1 \text{ und es gibt ein } \beta \text{ mit} \\ f(\beta) > 1 \text{ und}$$

$$(iii) \quad \log f(\alpha) = O(\log \alpha),$$

so gilt für beliebiges $\varepsilon > 0$ und $N \geq N_0(\varepsilon)$

$$\log F(d(N)) \leq c_4 \frac{\sqrt{\log N}}{\log \log N} (1 + \varepsilon)$$

und es gibt unendlich viele N mit

$$\log F(d(N)) \geq c_4 \frac{\sqrt{\log N}}{\log \log N} (1 - \varepsilon).$$

(Die Konstante c_4 werden wir im §7 genauer angeben.)

Im §8 wollen wir schließlich noch die mittlere Größenordnung bei der Hintereinanderausführung zweier primzahl-unabhängiger Funktionen betrachten. Einige Spezialfälle wurden schon von I. Kátai [5], G.J. Rieger [11] und dem Verfasser [4] behandelt. Hier werden wir zeigen :

Satz 8.1. Sei $F_2: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ multiplikativ,

$$F_2(p) = \prod_{i=1}^r p_i^{s_i} \text{ konstant für alle}$$

Primzahlen p und $F_1: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ multiplikativ

oder additiv mit $F_1(p_i^m) = R_i(m)$ für ein

Polynom R_i vom Grad g_i . Weiter sei

$F_i(n) = O(n^{\alpha_i})$ mit $\alpha_1 \alpha_2 < \frac{1}{2}$. Dann gilt mit

$$g = \begin{cases} \max_{i \leq r} g_i & \text{für additives } F_1 \\ \sum_{i=1}^r g_i & \text{für multiplikatives } F_1 \end{cases}$$

die asymptotische Formel

$$\sum_{n \leq x} F_1(F_2(n)) = \sum_{l=0}^g b_l x (\log \log x)^l + O\left(\frac{x}{\log x} (\log \log x)^g\right).$$

An dieser Stelle möchte ich Herrn Prof. Dr. W. Schwarz für die Anregung zu dieser Arbeit und viele wertvolle Ratschläge bei ihrer Durchführung danken.

§ 2 Die maximale Größenordnung

Das wichtigste Ergebnis dieses Paragraphen ist der folgende Satz 2.1. Die Sätze 2.1 und 2.2 wurden bereits (ohne Beweis) in [3] veröffentlicht. Satz 2.3 wurde dort bereits bewiesen.

Satz 2.1. Sei F eine multiplikative Funktion mit

- (i) $F(p^\alpha) = f(\alpha)$,
- (ii) $f(\alpha) \geq 1$, $f(\alpha) \neq 1$ und
- (iii) $\log f(\alpha) = o(\alpha)$

und sei

$$g(a) = \min_{0 \leq b < a} \left\{ \frac{f(a)}{f(b)} \right\}^{\frac{1}{a-b}}.$$

Weiter sei $A_0 = 0$ und für $i \geq 1$ sei A_i so gewählt, daß $g(A_i) \geq g(a)$ für alle a mit $A_{i-1} < a \leq A_i$ und $g(A_i) > g(a)$ für alle $a > A_i$. Dann ist

$$\begin{aligned} \log F(N) &\leq \log f(A_1) \pi(g(A_1)^S) \\ &\quad + \sum_{j \geq 2} (\log f(A_j) - \log f(A_{j-1})) \pi(g(A_j)^S). \end{aligned}$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} s &= \inf \left\{ t \mid A_1 \mathcal{V}(g(A_1)^t) + \sum_{j \geq 2} (A_j - A_{j-1}) \mathcal{V}(g(A_j)^t) \right. \\ &\quad \left. \geq \log N \right\}. \end{aligned}$$

Für unendlich viele N steht das Gleichheitszeichen.

Bevor wir zum Beweis kommen, wollen wir noch drei Bemerkungen zu diesem Satz einschieben.

Bemerkung 2.1. Ist F eine multiplikative Funktion, die den Voraussetzungen (i) und (iii) genügt, so können wir die multiplikative Funktion F^+ definieren durch

$$F^+(p^\alpha) = \max \{ F(p^\alpha), 1 \}.$$

Ist $F^+ \equiv 1$, so gilt offenbar

$$\log |F(N)| \leq 0.$$

F erreicht seine maximale Größenordnung auf Zahlen der Form p^m .

Ist $F^+ \not\equiv 1$, so haben wir mit Satz 2.1 eine obere Abschätzung für $\log F^+(N)$ und damit auch für $\log |F(N)| \leq \log F^+(N)$. Die so erhaltene Abschätzung ist aber auch scharf, denn im Beweis von Satz 2.1 werden Zahlen H konstruiert, für die F^+ die maximale Größenordnung erreicht, und diese Zahlen besitzen nur Teiler $p^\alpha \parallel H$ mit $F^+(p^\alpha) > 1$, also ist für diese Zahlen $F^+(H) = |F(H)|$.

Bemerkung 2.2. Der Satz ist nicht richtig, wenn die Voraussetzung (iii) durch $\log f(\alpha) = O(\alpha)$ ersetzt wird. Ist zum Beispiel

$f(\alpha) = 2^\alpha$, so ist $g(a) \equiv 2$ und damit sind die Zahlen A_i nicht definiert.

Bemerkung 2.3. Es gilt

$$A_1 = \max \left\{ B \mid \frac{\log f(B)}{B} \geq \frac{\log f(A)}{A} \text{ für alle } A \right\}$$

$$\text{und } \log g(A_1) = \frac{\log f(A_1)}{A_1}.$$

Beweis. Sei

$$B_1 = \max \left\{ B \mid \frac{\log f(B)}{B} \geq \frac{\log f(A)}{A} \text{ für alle } A \right\}.$$

Zunächst ist

$$\log g(B_1) = \frac{\log f(B_1)}{B_1},$$

da aus

$$\log g(B_1) = \frac{\log f(B_1) - \log f(B)}{B_1 - B} < \frac{\log f(B_1)}{B_1}$$

sofort

$$\frac{\log f(B)}{B} > \frac{\log f(B_1)}{B_1}$$

folgt. Nun ist

$$\frac{\log f(B_1)}{B_1} = g(B_1) \leq g(A_1) \leq \frac{\log f(A_1)}{A_1}$$

und wir erhalten die Behauptung.

Beweis von Satz 2.1. Der folgende Beweis

ist eine Verallgemeinerung einer von S.

Ramanujan in [10] benutzten Beweismethode.

(Er zeigte damit

$$\log d(N) \leq \log 2 \operatorname{li}(\log N) + O(\log N \exp(-c\sqrt{\log \log N})).$$

Wegen (iii) geht für jedes $\delta > 0$ der Quotient $F(N)/N^\delta$ gegen Null für N gegen Unendlich. Es gibt deshalb eine eindeutig bestimmte natürliche Zahl $H = H(\delta)$ mit

$$(2.1) \quad F(H)/H^\delta \geq F(N)/N^\delta \text{ für alle } N \leq H \text{ und} \\ F(H)/H^\delta > F(N)/N^\delta \text{ für alle } N > H.$$

Wir setzen

$$H = \prod_p p^{a(p)}.$$

Betrachtet man speziell die Zahlen

$$N = H p^{b-a(p)} \text{ bzw. } N = H p^d$$

mit $0 \leq b < a(p)$ bzw. $d \geq 1$, so folgt

$$a(p) = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } g(a) < p^\delta \text{ für alle } a \text{ ist,} \\ \max_{g(a) \geq p^\delta} a & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es sei nun p_1 der größte Primfaktor von H und

$$p_i = \max\{p \mid p \mid H \text{ und } a(p) \neq a(p_j) \text{ für alle } j < i\}.$$

Dann ist

$$\log F(H) = \log f(a(p_1)) \pi(p_1) \\ + \sum_{j \geq 2} (\log f(a(p_j)) - \log f(a(p_{j-1}))) \pi(p_j).$$

Für $\delta \leq \delta_1$ gibt es sicher eine Primzahl p mit $(x = 1/\delta)$

$$g(A_2)^x < p \leq g(A_1)^x$$

(bzw. $1 < p \leq g(A_1)^x$, falls $g(a) \leq 1$ für alle $a > A_1$. In diesem Fall besteht die Menge der A_i nur aus A_1 . Die folgenden Rechnungen vereinfachen sich dadurch wesentlich. Wir wollen aber auf diesen Fall nicht näher eingehen und setzen jetzt also die Existenz von A_2 voraus.) Deshalb ist $a(p_1) = A_1$. Aus

$$a(p_i) = \max_{g(a) \geq p_i^\delta} a$$

folgt $g(a) < g(a(p_i))$ für alle $a > a(p_i)$ und damit $a(p_i) \in \{A_j\}$. Sei nun $a(p_i) = A_k$, $a(p_{i+1}) = A_m$ und $k < l < m$. Ist $\pi(g(A_m)^x) \neq \pi(g(A_l)^x)$, so gibt es eine Primzahl p mit

$$g(A_m)^x < p \leq g(A_l)^x.$$

Dann ist aber

$$a(p) = \max_{g(a)^x \geq p} a \geq A_l > A_k \geq a(p_j) \text{ für } j \leq i$$

und $p > g(A_m)^x \geq p_{i+1}$. Das ist ein Widerspruch zur Definition von p_{i+1} . Also ist $\pi(g(A_m)^x) = \pi(g(A_l)^x)$ und da offenbar $\pi(p_{i+1}) = \pi(g(A_m)^x)$ und $\pi(p_i) = \pi(g(A_k)^x)$ ist, gilt

$$\begin{aligned}
 & \pi(p_i)(\log f(a(p_i)) - \log f(a(p_{i-1}))) \\
 & + \pi(p_{i+1})(\log f(a(p_{i+1})) - \log f(a(p_i))) \\
 & = \pi(g(A_k)^x)(\log f(A_k) - \log f(a(p_{i-1}))) \\
 & + \pi(g(A_1)^x)(\log f(A_1) - \log f(A_k)) \\
 & + \pi(g(A_m)^x)(\log f(A_m) - \log f(A_1)).
 \end{aligned}$$

Wir erhalten so

$$\begin{aligned}
 \log F(H) &= \log f(A_1) \pi(g(A_1)^x) \\
 &+ \sum_{j \geq 2} \pi(g(A_j)^x)(\log f(A_j) - \log f(A_{j-1})).
 \end{aligned}$$

Ganz analog zeigt man

$$\begin{aligned}
 \log H &= A_1 \mathcal{V}(g(A_1)^x) \\
 &+ \sum_{j \geq 2} \mathcal{V}(g(A_j)^x)(A_j - A_{j-1}).
 \end{aligned}$$

Wir wollen uns nun überlegen, daß auch für

$$\begin{aligned}
 s &= \inf \{ t \mid A_1 \mathcal{V}(g(A_1)^t) \\
 &+ \sum_{j \geq 2} \mathcal{V}(g(A_j)^t)(A_j - A_{j-1}) \geq \log N \}
 \end{aligned}$$

noch

$$A_1 \mathcal{V}(g(A_1)^s) + \sum_{j \geq 2} \mathcal{V}(g(A_j)^s)(A_j - A_{j-1}) \geq \log N$$

gilt. Zunächst können wir uns auf t mit

$t \leq K \log \log N$ beschränken (mit einer geeigneten Konstanten K), da sonst schon

$A_1 \mathcal{J}(g(A_1)^t) > \log N$ ist. Für alle $t \leq K \log \log N$ gilt aber für $j \geq j_0(K, N)$ die Ungleichung $g(A_j)^t < 2$, so daß wir es nur mit einer endlichen Summe zu tun haben. Darin sind die $g(A_j)^t$ stetige, monotone Funktionen (von t), während die Funktion $\mathcal{J}$ von rechts halbstetig ist. Hieraus folgt nun die Behauptung.

Mit (2.1) und $\delta = 1/s$ ergibt sich schließlich die Behauptung des Satzes. (Das Gleichheitszeichen steht für jedes $H(\delta)$.)

In Satz 2.1 stört vielleicht die (formal) unendliche Summe. Man kann sich fragen, ob man sich hier nicht auf nur einen (oder nur r) Terme beschränken kann. Dazu zeigen wir :

Satz 2.2. Wir wählen die Bezeichnungen wie

in Satz 2.1. Zusätzlich zu dessen Voraussetzungen gelte

$$(iii)' \log f(\alpha) = o\left(\frac{\alpha}{\log \alpha}\right).$$

Ist dann $\beta > 0$ gegeben, so gilt

$$\begin{aligned} \log F(N) &\leq \log f(A_1) \pi(g(A_1)^{\tilde{s}}) \\ &\quad + \sum_{j=2}^{r-1} (\log f(A_j) - \log f(A_{j-1})) \pi(g(A_j)^{\tilde{s}}) \\ &\quad + O(\log^{\beta} N). \end{aligned}$$

Dabei ist

$$r = \min \{k \mid \frac{\log g(A_k)}{\log g(A_1)} < \beta \} \quad \text{und}$$

$$\tilde{s} = \inf \{t \mid A_1 \mathcal{V}(g(A_1)^t)$$

$$+ \sum_{j=2}^{r-1} (A_j - A_{j-1}) \mathcal{V}(g(A_j)^t) \geq \log N \}.$$

Für unendlich viele N steht das Gleichheitszeichen.

Beweis. Aus dem Beweis von Satz 2.1 übernehmen wir

$$\begin{aligned} \log F(H) &= \log f(A_1) \pi(g(A_1)^X) \\ &+ \sum_{j \geq 2} \pi(g(A_j)^X) (\log f(A_j) - \log f(A_{j-1})) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \log H &= A_1 \mathcal{V}(g(A_1)^X) \\ &+ \sum_{j \geq 2} \mathcal{V}(g(A_j)^X) (A_j - A_{j-1}). \end{aligned}$$

Wir wählen $u > 0$ mit $(1+u)^3 \leq g(A_R)$ und R so groß, daß

$$\frac{\log a}{a} \log f(a) \leq \log(1+u) \log 2 \quad \text{für } a \geq R.$$

Dann spalten wir die Summe für $\log F(H)$ auf in

$$\begin{aligned} \log F(H) &= \log f(A_1) \pi(g(A_1)^X) \\ &+ \sum_{j=2}^{r-1} \pi(g(A_j)^X) (\log f(A_j) - \log f(A_{j-1})) \\ &+ \sum_{j=r}^R \pi(g(A_j)^X) (\log f(A_j) - \log f(A_{j-1})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{j > R} \pi(g(A_j)^X) (\log f(A_j) - \log f(A_{j-1})) \\
 & = \log f(A_1) \pi(g(A_1)^X) \\
 & + \sum_{j=2}^{r-1} \pi(g(A_j)^X) (\log f(A_j) - \log f(A_{j-1})) \\
 & + \sum_1 + \sum_2 .
 \end{aligned}$$

In $\sum_1$ ist die Anzahl der Summanden $\leq R$,
 $\log f(A_j) \leq L(R)$ und $\pi(g(A_j)^X) \leq g(A_r)^X$.
 Also ist

$$\sum_1 \ll g(A_r)^X.$$

In $\sum_2$ ist wegen $j > R$

$$\begin{aligned}
 \delta \log 2 \log A_j & \leq \frac{\log f(A_j)}{A_j} \log A_j \leq \\
 & \log 2 \log(1 + u),
 \end{aligned}$$

also $A_j \leq (1 + u)^X$. Damit ist auch

$$\log f(A_j) \ll A_j \leq (1 + u)^X,$$

während

$$\pi(g(A_j)^X) \leq g(A_j)^X \leq f(A_j)^{X/A_j} \leq (1+u)^X.$$

Die Anzahl der Summanden ist

$$\leq \pi(g(A_{R+1})^X) \leq (1 + u)^X.$$

Wir erhalten somit

$$\sum_2 \ll (1 + u)^{3X} \ll g(A_r)^X$$

und schließlich

$$\log F(H) = \log f(A_1) \pi(g(A_1)^X)$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{j=2}^{r-1} \pi(g(A_j)^x) (\log f(A_j) - \log f(A_{j-1})) \\
 & + O(g(A_r)^x)
 \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}
 \log H &= A_1 \mathcal{V}(g(A_1)^x) + \sum_{j=2}^{r-1} \mathcal{V}(g(A_j)^x) (A_j - A_{j-1}) \\
 &+ O(g(A_r)^x).
 \end{aligned}$$

Weiter schließen wir wie im Beweis von Satz 2.1 und erhalten im Ergebnis das zusätzliche Restglied $O(g(A_r)^s)$. Nun ist $A_1 \mathcal{V}(g(A_1)^t) \sim A_1 g(A_1)^t$ und damit

$$s \leq \frac{\log \log N}{\log g(A_1)} (1 + \varepsilon),$$

womit das Restglied gleich

$$O(\exp(\log \log N \frac{\log g(A_r)}{\log g(A_1)} (1+\varepsilon))) = O(\log^\beta N)$$

wird. Damit ist der Satz 2.2 bewiesen.

Mit Hilfe des Primzahlsatzes können wir (auf Kosten des Restgliedes) die Behauptung weiter vereinfachen.

Satz 2.3. Mit den Bezeichnungen und Voraussetzungen von Satz 2.2 gilt

$$\begin{aligned}
 \log F(N) &\leq \log f(A_1) \operatorname{li}\left(\frac{\log N}{A_1}\right) \\
 &+ O(\log N \exp(-c\sqrt{\log \log N})).
 \end{aligned}$$

Für unendlich viele N gilt das Gleichheitszeichen.

Beweis. Aus dem Beweis von Satz 2.2 übernehmen wir (mit $r = 2$)

$$\log F(H) = \log f(A_1) \pi(g(A_1)^x) + O(g(A_2)^x)$$

und

$$\log H = A_1 \mathcal{V}(g(A_1)^x) + O(g(A_2)^x).$$

Mit dem Primzahlsatz mit Restglied folgt mit (2.1)

$$\begin{aligned} \log F(N) &\leq \log F(H) + \delta \log N - \delta \log H \\ &= \log f(A_1) \operatorname{li}(g(A_1)^x) + \delta \log N \\ &\quad - \delta A_1 g(A_1)^x + O(g(A_1)^x \exp(-c\sqrt{x})). \end{aligned}$$

Wählen wir nun

$$x = \frac{\log \log N - \log A_1}{\log g(A_1)},$$

so folgt die Behauptung des Satzes.

Wir wollen nun noch zwei Beispiele betrachten.

Beispiel 2.1. Sei $d_k(N)$ die Anzahl der Darstellungen von N als Produkt von k natürlichen Zahlen, also

$d_2(N)$ die Anzahl der Teiler von N und $d_{k+1}(N)$

$= \sum_{t|N} d_k(t)$. Dann ist

$$d_k(p^{\alpha+1}) = d_k(p^\alpha) + d_{k-1}(p^{\alpha+1})$$

und hieraus folgt leicht

$$\frac{d_k(p^{\alpha+1})}{d_k(p^{\beta+1})} < \frac{d_k(p^\alpha)}{d_k(p^\beta)} \quad \text{für } \beta < \alpha,$$

also auch

$$g(\alpha+1) < g(\alpha).$$

Damit ist offenbar $A_i = i$ und es folgt zum Beispiel aus Satz 2.3

Korollar 2.4.

$$\log d_k(N) \leq \log k \operatorname{li}(\log N) \\ + O(\log N \exp(-c\sqrt{\log \log N})).$$

Für unendlich viele N gilt das Gleichheitszeichen.

Für $k = 2$ wurde dies schon von Ramanujan [10] bewiesen.

Beispiel 2.2. Betrachten wir nun die Funktion $A(N)$, die Anzahl der nicht isomorphen abelschen Gruppen der Ordnung N . Um aus unserem Satz 2.2 das in der Einleitung zitierte Ergebnis von W. Schwarz und E. Wirsing herzuleiten, müssen wir die Konstanten A_1 und A_2 bestimmen.

Es ist $A(p^\alpha) = P(\alpha)$, wobei $P(\alpha)$ die Anzahl der Partitionen von α bezeichnet. Erdős zeigte 1942 [1]

$$P(\alpha) \leq \exp\left(\frac{2\pi}{\sqrt{6}}\sqrt{\alpha}\right).$$

Damit ist

$$\log g(a) \leq \frac{\log P(a)}{\sqrt{a}} \leq \frac{2\pi}{\sqrt{6}\sqrt{a}} < 0,35 \text{ für } a \geq 54.$$

Mit einem Computer berechnet man leicht die Werte für $\log g(a)$ für $a < 54$ und findet $A_1 = 4$, $\log g(A_1) \approx 0,402$, $A_2 = 6$ und $\log g(A_2) \approx 0,394$. (Alle anderen Werte von $\log g(a)$ für $7 \leq a \leq 54$ sind kleiner als 0,35. Die numerischen Ergebnisse lassen vermuten, daß $A_i = 2 + 2i$ für $i \leq 12$ und $A_i = i + 14$ für $i \geq 12$.)

Weiter ist

$$\frac{\log g(A_2)}{\log g(A_1)} < 0,98$$

und aus Satz 2.2 folgt

Korollar 2.5.

$$\log A(N) \leq \log 5 \pi(x) + O((\log N)^{0,98}),$$

wobei $x = \min\{y \mid \mathcal{V}(y) \geq \frac{1}{4} \log N\}$. Für unendlich viele N steht das Gleichheitszeichen.

§ 3 Eine Anwendung der Beweismethode aus §2
auf nicht primzahl-unabhängige multiplikative
Funktionen.

Analog zu Satz 2.1 können wir zeigen :

Satz 3.1. Sei F eine multiplikative Funktion mit

$$(i) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{F(N)}{N^\varepsilon} = 0 \text{ für jedes } \varepsilon > 0 \text{ und}$$

$$(ii) \quad F(N) \geq 1 \text{ für alle } N.$$

Sei weiter

$$g(p, a) = \min_{0 \leq b < a} \left\{ \frac{F(p^a)}{F(p^b)} \right\}^{\frac{1}{a-b}} \quad \text{und}$$

$$P_a(\delta) = \{ p \mid \text{Es gibt ein } b \geq a \text{ mit } g(p, b) \geq p^\delta \}.$$

Gibt es dann unendlich viele Paare (p, a)

mit $g(p, a) > 1$, so ist

$$\begin{aligned} \log F(N) &\leq \sum_{p \in P_1(\delta_0)} \log F(p) \\ &+ \sum_{a=2}^{\infty} \sum_{p \in P_a(\delta_0)} (\log F(p^a) - \log F(p^{a-1})), \end{aligned}$$

wobei

$$\delta_0 = \sup \left\{ \delta \mid \sum_{a=1}^{\infty} \sum_{p \in P_a(\delta)} \log p \geq \log N \right\},$$

und für unendlich viele N steht das Gleichheitszeichen.

Bemerkung 3.1. Gibt es nur endlich viele Paare (p,a) mit $g(p,a) > 1$, so ist die Funktion F nach oben beschränkt.

Beweis von Satz 3.1. Es gibt genau ein $H = H(\delta)$ mit

$$(3.1) \quad \frac{F(N)}{N^\delta} \leq \frac{F(H)}{H^\delta} \quad \text{für alle } N \leq H \text{ und}$$

$$\frac{F(N)}{N^\delta} < \frac{F(H)}{H^\delta} \quad \text{für alle } N > H.$$

Dieses H ist gleich $\prod_p p^{a(p,\delta)}$ mit

$$a(p,\delta) = \begin{cases} 0 & \text{falls } g(p,a) < p^\delta \text{ für alle } a \in \mathbb{N} \text{ und} \\ \max_{g(p,a) \geq p^\delta} a & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \log F(H) &= \sum_{a=1}^{\infty} \sum_{\substack{p=2 \\ a(p,\delta)=a}} \log F(p^a) \\ &= \sum_{\substack{p=2 \\ a(p,\delta) \geq 1}} \log F(p) \\ &\quad + \sum_{a=2}^{\infty} \sum_{\substack{p=2 \\ a(p,\delta) \geq a}} (\log F(p^a) - \log F(p^{a-1})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{p \in P_1(\delta)} \log F(p) \\
 &+ \sum_{a=2}^{\infty} \sum_{p \in P_a(\delta)} (\log F(p^a) - \log F(p^{a-1}))
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 \log H &= \sum_{a=1}^{\infty} a \sum_{\substack{p=2 \\ a(p, \delta)=a}} \log p \\
 &= \sum_{a=1}^{\infty} \sum_{p \in P_a(\delta)} \log p.
 \end{aligned}$$

Aus (3.1) folgt nun der erste Teil der Behauptung, wenn wir zeigen können, daß $\log H$ als Funktion von δ von links halbstetig ist, das heißt wir müssen den $\lim_{\substack{\delta \rightarrow \delta_0 \\ \delta < \delta_0}} \log H(\delta)$

betrachten und zeigen, daß aus $\log H(\delta) \geq \log N$ auch $\log H(\delta_0) \geq \log N$ folgt. Dazu schreiben wir

$$\log H(\delta) = \sum_{p=2}^{\infty} \log p \, a(p, \delta).$$

Es ist für $a(p, \delta) \neq 0$

$$g(p, a(p, \delta)) \geq p^\delta \geq p^{\delta_1} \quad \text{und}$$

$$g(p, a(p, \delta)) \leq F(p^{a(p, \delta)})^{1/a(p, \delta)} \leq K p^{\delta_1/2}$$

für ein $K = K(\delta_1)$.

Hieraus folgt $a(p, \delta) = 0$ für $p > P_0(\delta_1)$, die Anzahl der Summanden ist also beschränkt und es genügt zu zeigen, daß $a(p, \delta)$ als Funktion von δ von links halbstetig ist. Wegen

$$g(p, a) \leq F(p^a)^{1/a} \quad \text{und} \quad \lim_{a \rightarrow \infty} F(p^a)^{1/a} = 1$$

nimmt $a(p, \delta)$ für $\delta_1 < \delta < \delta_0$ nur endlich

viele Werte an und ist offenbar monoton

fallend. Ist $b = \min_{\delta_1 < \delta < \delta_0} a(p, \delta)$, so gilt deshalb

$$g(p, b) \geq p^\delta \quad \text{für alle } \delta < \delta_0$$

und damit auch $g(p, b) \geq p^{\delta_0}$, also $a(p, \delta) = b$

im Intervall $\delta_2 \leq \delta \leq \delta_0$ (mit geeignetem δ_2).

Der erste Teil der Behauptung des Satzes ist damit bewiesen.

Gibt es unendlich viele (p, a) mit $g(p, a) > 1$, so gibt es unendlich viele p , für die es ein $b(p)$ gibt mit $g(p, b(p)) > 1$, oder es gibt

ein p_0 und unendlich viele a mit $g(p_0, a) > 1$.
Im ersten Fall geht für $\delta \rightarrow 0$ die Anzahl der
Primfaktoren von H gegen Unendlich, im zweiten
Fall geht der Exponent von p_0 gegen Unendlich.
Es ist also $\lim_{\delta \rightarrow 0} H(\delta) = \infty$ und deshalb gibt es
unendlich viele verschiedene $H(\delta)$, womit
auch die zweite Behauptung des Satzes bewiesen
ist.

Wir wollen diesen Satz nun anwenden auf
die Funktionen

$$\sigma_{\alpha}(N) = \sum_{d|N} d^{\alpha}.$$

Es ist $\sigma_{\alpha}(N) = N^{\alpha} \sigma_{-\alpha}(N)$. Wir betrachten
deshalb im Folgenden nur $\sigma_{-\alpha}(N)$ für $\alpha \geq 0$.
Für $\alpha = 0$ erhalten wir die Teilerfunktion,
die schon im §2 behandelt wurde. Für $\alpha > 1$
ist offenbar

$$\sigma_{-\alpha}(N) \leq \sum_{m=1}^{\infty} m^{-\alpha} \text{ und } \sigma_{-\alpha}(N!) \geq \sum_{m=1}^N m^{-\alpha},$$

das heißt $\sigma_{-\alpha}(N)$ kann durch die Konstante
 $K(\alpha) = \sum_{m=1}^{\infty} m^{-\alpha}$ abgeschätzt werden und es gibt
zu jedem $\varepsilon > 0$ unendlich viele N mit $\sigma_{-\alpha}(N)$
 $> K(\alpha) - \varepsilon$. Wir werden uns deshalb auf den
Fall $0 < \alpha \leq 1$ beschränken.

Zunächst bestätigt man leicht

Lemma 3.2. Sei $\alpha > 0$ und $0 \leq b < a$. Dann gilt

$$(i) \quad \frac{1 + p^{-\alpha} + \dots + p^{-\alpha(a+1)}}{1 + p^{-\alpha} + \dots + p^{-\alpha(b+1)}} < \frac{1 + p^{-\alpha} + \dots + p^{-\alpha a}}{1 + p^{-\alpha} + \dots + p^{-\alpha b}} \quad \text{und}$$

$$(ii) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{1 + t^{-\alpha} + \dots + t^{-\alpha a}}{1 + t^{-\alpha} + \dots + t^{-\alpha b}} \right) < 0 \quad \text{für } t > 1.$$

Damit hat die Funktion

$$g_{\alpha}(p, a) = \min_{0 \leq b < a} \left\{ \frac{\sigma_{-\alpha}(p^a)}{\sigma_{-\alpha}(p^b)} \right\}^{\frac{1}{a-b}}$$

die Eigenschaften

$$g_{\alpha}(p, a+1) < g_{\alpha}(p, a) \quad \text{und}$$

$$g_{\alpha}(q, a) < g_{\alpha}(p, a) \quad \text{für } q > p.$$

Mit

$$N_{\alpha}(a, \delta) = \max_{g_{\alpha}(p, a) \geq p^{\delta}} p$$

ist deshalb

$$(3.2) \quad P_a(\delta) = \{ p \mid p \leq N_{\alpha}(a, \delta) \}.$$

Es soll nun $N_{\alpha}(a, \delta)$ nach oben und unten abgeschätzt werden.

Es ist

$$\begin{aligned} g_{\alpha}(p, a) &\geq \left(\frac{1 + \dots + p^{-\alpha a}}{1 + \dots + p^{-\alpha(a-1)}} \right)^{\frac{1}{a}} \\ &\geq \left(1 + \frac{1-2^{-\alpha}}{p^{a\alpha}} \right)^{\frac{1}{a}} \end{aligned}$$

und

$$\log \left(1 + \frac{1-2^{-\alpha}}{t^{a\alpha}} \right)^{\frac{1}{a}} - \delta \log t$$

ist als Funktion von t monoton fallen und größer als Null für

$$t = \left(\frac{\tilde{c}}{\delta \log \frac{1}{\delta}} \right)^{\frac{1}{a\alpha}}, \quad \tilde{c} < \alpha(1-2^{-\alpha}), \quad \delta \leq \delta_1(\tilde{c}, \alpha).$$

Es ist also

$$(3.3) \quad N_{\alpha}(a, \delta) \geq \max \left\{ p \mid p \leq \left(\frac{\tilde{c}}{\delta \log \frac{1}{\delta}} \right)^{\frac{1}{a\alpha}} \right.$$

$$\left. \text{für } \tilde{c} < \alpha(1-2^{-\alpha}), \delta \leq \delta_1(\tilde{c}, \alpha). \right.$$

In der anderen Richtung haben wir

$$g_{\alpha}(p, a) \leq \frac{1 + \dots + p^{-a\alpha}}{1 + \dots + p^{-(a-1)\alpha}} \leq 1 + p^{-a\alpha}$$

und damit

$$\log g_{\alpha}(p, a) \leq p^{-a\alpha} \leq \delta \log p$$

für

$$p \geq \left(\frac{a\alpha(1+u)}{\delta \log \frac{1}{\delta}} \right)^{\frac{1}{a\alpha}}, \quad u > 0, \quad \delta \leq \delta_2(u, \alpha).$$

Hieraus folgt nun

$$(3.4) \quad N_{\alpha}(a, \delta) \leq \left(\frac{d}{\delta \log \frac{1}{\delta}} \right)^{\frac{1}{a\alpha}} \quad \text{für } d = a\alpha(1+u),$$

$$u > 0, \quad \delta \leq \delta_2(u, \alpha).$$

Wir wollen uns nun auf den Fall $\alpha > \frac{1}{2}$ beschränken. Dann ist

$$(3.5) \quad \sum_{a=2}^{\infty} \sum_{p \leq N_{\alpha}(a, \delta)} (\log \sigma_{-\alpha}(p^a) - \log \sigma_{-\alpha}(p^{a-1}))$$

$$= \sum_{\substack{a=2 \\ N_{\alpha}(a, \delta) \geq 2}}^{\infty} \sum_{p \leq N_{\alpha}(a, \delta)} (\log \sigma_{-\alpha}(p^a) - \log \sigma_{-\alpha}(p^{a-1}))$$

$$= \sum_{a=2}^{\infty} \sum_{p=2}^{\infty} (\log \sigma_{-\alpha}(p^a) - \log \sigma_{-\alpha}(p^{a-1}))$$

$$+ O\left(\sum_{\substack{a=2 \\ N_{\alpha}(a, \delta) \geq 2}}^{\infty} \sum_{p > N_{\alpha}(a, \delta)} (\log \sigma_{-\alpha}(p^a) - \log \sigma_{-\alpha}(p^{a-1})) \right)$$

$$+ O\left(\sum_{N_{\alpha}(a, \delta) < 2} \sum_{p=2}^{\infty} (\log \sigma_{-\alpha}(p^a) - \log \sigma_{-\alpha}(p^{a-1})) \right)$$

$$= c(\alpha) + O(\sum_1) + O(\sum_2).$$

Es ist

$$(3.6) \quad \log \sigma_{-\alpha}(p^a) - \log \sigma_{-\alpha}(p^{a-1}) = O(p^{-a\alpha}).$$

Aus $N_{\alpha}(a, \delta) \geq 2$ folgt mit (3.4)

$$a \ll \log \frac{1}{\delta}$$

und wegen (3.3) und (3.6) ist

$$\sum_{p \in N_\alpha(a, \delta)} (\log \sigma_{-\alpha}(p^a) - \log \sigma_{-\alpha}(p^{a-1})) \\ \ll (\delta \log \frac{1}{\delta})^{1-\frac{1}{2\alpha}}.$$

Damit ist

$$(3.7) \quad \sum_1 \ll (\delta \log \frac{1}{\delta})^{1-\frac{1}{2\alpha}} \log \frac{1}{\delta}.$$

Aus $N_\alpha(a, \delta) < 2$ und (3.3) folgt

$$a > \frac{1}{\alpha \log 2} (\log \frac{1}{\delta} - \log \log \frac{1}{\delta} (1 + \theta))$$

für $\theta > 0$, $\delta \leq \delta_3(\alpha, \theta, \tilde{c})$ und mit

$$\sum_{p=2}^{\infty} p^{-a\alpha} \ll 2^{-a\alpha}$$

folgt schließlich

$$(3.8) \quad \sum_2 \ll \sum_{a > \frac{1}{\alpha \log 2} (\log \frac{1}{\delta} - (1+\theta) \log \log \frac{1}{\delta})} 2^{-a\alpha} \\ \ll \delta (\log \frac{1}{\delta})^{1+\theta}.$$

Aus (3.5), (3.7) und (3.8) folgt nun

$$(3.9) \quad \sum_{a=2}^{\infty} \sum_{p \in N_\alpha(a, \delta)} (\log \sigma_{-\alpha}(p^a) - \log \sigma_{-\alpha}(p^{a-1})) \\ = c(\alpha) + O((\delta \log \frac{1}{\delta})^{1-\frac{1}{2\alpha}} \log \frac{1}{\delta}).$$

Weiter haben wir noch

$$(3.10) \quad \sum_{a=2}^{\infty} \sum_{p \leq N_{\alpha}(a, \delta)} \log p \ll \log \frac{1}{\delta} N_{\alpha}(2, \delta) \\ \ll \log \frac{1}{\delta} \left(\delta \log \frac{1}{\delta} \right)^{1 - \frac{1}{2\alpha}}$$

und

$$(3.11) \quad \sum_{a=2}^{\infty} \sum_{p \leq N_{\alpha}(a, \delta)} p^{-a\alpha} \\ \ll \log \frac{1}{\delta} \left(\log \frac{1}{\delta} + \left(\delta \log \frac{1}{\delta} \right)^{1 - \frac{1}{2\alpha}} \right).$$

Nach diesen Vorbereitungen zeigen wir

Satz 3.3. Mit den oben eingeführten Bezeichnungen gilt

(i) für $0 < \alpha \leq 1$

$$\sigma_{-\alpha}(N) \leq \prod_{p \leq N_{\alpha}(1, \delta_0)} (1 + p^{-\alpha}) \\ \cdot \prod_{a=2}^{\infty} \prod_{p \leq N_{\alpha}(a, \delta_0)} \left(1 + p^{-a\alpha} \frac{1 + p^{-\alpha}}{1 + p^{-a\alpha}} \right),$$

wobei

$$\delta_0 = \sup \left\{ \delta \mid \sum_{a=1}^{\infty} \mathcal{J}(N_{\alpha}(a, \delta)) \geq \log N \right\}.$$

(ii) für $0 < \alpha < 1$

$$\log \sigma_{-\alpha}(N) \leq \text{li}(\log^{1-\alpha} N) (1 + O(\exp(-c_{\alpha} \sqrt{\log \log N}))).$$

(iii) für $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$

$$\sigma_{-\alpha}(N) \leq e^{c(\alpha)} \prod_{p \leq A} (1 + p^{-\alpha}) \cdot (1 + O(\log \log N (\log N)^{\frac{1}{2} - \alpha})),$$

wobei $A = \inf\{B \mid \vartheta(B) \geq \log N\}$ ist.

(iv) für $\alpha = 1$

$$\sigma_{-1}(N) \leq e^{\gamma} \log \log N (1 + O(\exp(-c \sqrt{\log \log N}))).$$

In jedem dieser Fälle gibt es unendlich viele N , für die das Gleichheitszeichen gilt.

Bemerkung 3.2. Die Beziehung

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sigma_{-1}(N)}{\log \log N} = e^{\gamma}$$

wurde schon von Wigert [17] bewiesen.

Beweis von Satz 3.3.

(i) folgt unmittelbar aus Satz 3.1 und (3.2).

Zu (ii). Wir können (für genügend großes N) δ so wählen, daß

$$N_{\alpha}(1, \delta) = \max_{p \leq \log N} p$$

ist. Dann ist wegen (3.10)

$$(3.12) \quad \log H = \vartheta(N_{\alpha}(1, \delta)) + O\left(\log \frac{1}{\delta} \left(\delta \log \frac{1}{\delta}\right)^{-\frac{1}{2\alpha}}\right).$$

Aus (3.3) und (3.4) folgt mit geeigneten Konstanten c' und c''

$$(3.13) \quad c' \log^{-\alpha} N \leq \delta \log \frac{1}{\delta} \leq c'' \log^{-\alpha} N.$$

Durch Logarithmieren erhalten wir

$$(3.14) \quad \log \frac{1}{\delta} \sim \alpha \log \log N$$

und aus (3.13) und (3.14) schließlich

$$(3.15) \quad c^* \frac{\log^{-\alpha} N}{\log \log N} \leq \delta \leq c^{**} \frac{\log^{-\alpha} N}{\log \log N}.$$

Damit haben wir

$$(3.16) \quad \begin{aligned} \log H &= \mathcal{V}(\log N) + O(\log \log N (\log N)^{\frac{1}{2}}) \\ &= \log N + O(\log N \exp(-c \sqrt{\log \log N})). \end{aligned}$$

Aus (3.11) folgt

$$\begin{aligned} \log \sigma_{-\alpha}(H) &= \sum_{p \leq \log N} \log(1 + p^{-\alpha}) \\ &\quad + O(\log \log N (\log \log N + (\log N)^{\frac{1}{2}-\alpha})). \end{aligned}$$

Es ist

$$\begin{aligned} \sum_{p \leq \log N} \log(1 + p^{-\alpha}) &= \text{li}(\log^{1-\alpha} N) \\ &\quad + O(\log^{1-\alpha} N \exp(-c \sqrt{\log \log N})). \end{aligned}$$

Aus (3.1) folgt schließlich die Behauptung.

Zu (iii). Wir wählen δ so, daß $N_\alpha(1, \delta) = A$ ist. Die Behauptung folgt dann aus (3.1), (3.9) und (3.12).

Zu (iv). Aus $\delta_0 = \sup \left\{ \delta \mid \sum_{a=1}^{\infty} \mathcal{J}(N_1(1, \delta)) \geq \log N \right\}$ folgt mit ähnlichen Überlegungen wie oben die Gleichung

$$N_1(1, \delta_0) = \log N (1 + O(\exp(-c\sqrt{\log \log N}))).$$

Mit (3.9), Satz 3.1 und (3.4) haben wir

$$\begin{aligned} \log \sigma_{-1}(N) &\leq \sum_{p \leq N_1(1, \delta_0)} \log\left(1 + \frac{1}{p}\right) \\ &\quad + c(1) + O((\log N)^{-1/4}). \end{aligned}$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} c(1) &= \sum_{a=2}^{\infty} \sum_{p=2}^{\infty} (\log \sigma_{-1}(p^a) - \log \sigma_{-1}(p^{a-1})) \\ &= \sum_{p \leq N_1(1, \delta_0)} (\log(1 - \frac{1}{p})^{-1} - \log(1 + \frac{1}{p})) \\ &\quad + O((N_1(1, \delta_0))^{-1}) \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \log \sigma_{-1}(N) &\leq \sum_{p \leq N_1(1, \delta_0)} \log\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \\ &\quad + O((\log N)^{-\frac{1}{4}}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \log \log N_1(1, \delta_0) + \gamma + O(\exp(-c\sqrt{\log N_1(1, \delta_0)})) \\ &+ O((\log N)^{-1/4}) \\ &= \log \log \log N + \gamma + O(\exp(-c\sqrt{\log \log N})). \end{aligned}$$

Damit ist auch (iv) bewiesen.

Die Abschätzungen nach unten (für unendlich viele N) sind wieder trivial.

§ 4 Die maximale Größenordnung bei zusätzlichen Voraussetzungen an N.

In diesem Paragraphen soll die maximale Größenordnung einer primzahl-unabhängigen multiplikativen Funktion auf gewissen Teilmengen der Menge der natürlichen Zahlen untersucht werden.

In manchen Fällen lassen sich diese Untersuchungen durch Abänderung der Funktion auf schon bewiesene Sätze zurückführen. Betrachten wir zum Beispiel die Menge

$$A = \{n \mid n \text{ ist } k\text{-frei für alle } k \in B\}$$

mit einer Teilmenge B der natürlichen Zahlen, so definieren wir die multiplikative Funktion F^+ durch

$$F^+(p^\alpha) = \begin{cases} F(p^\alpha) & \text{für } \alpha \notin B \\ 1 & \text{für } \alpha \in B. \end{cases}$$

Auf F^+ können wir dann die Ergebnisse aus §2 anwenden und wegen $F(N) \leq F^+(N)$ für alle $N \in A$ haben wir eine obere Abschätzung für $F|_A$. Diese ist aber auch scharf, denn eine Zahl H mit (2.1) (für F^+) besitzt in ihrer Primzerlegung $H = \prod p_i^{\alpha_i}$ offenbar nur $\alpha_i \notin B$.

Für eine Teilmenge P der Menge aller Primzahlen betrachten wir nun die Menge

$$C = \{n \mid p \mid n \Rightarrow p \in P\}.$$

Ganz analog zu den Sätzen 2.1 und 2.2 läßt sich zeigen :

Satz 4.1. F erfülle die Voraussetzungen von Satz 2.1. Dann gilt mit den dortigen Bezeichnungen

$$\begin{aligned} \log F(N) &\leq \log f(A_1) \pi_P(g(A_1)^s) \\ &+ \sum_{j \geq 2} (\log f(A_j) - \log f(A_{j-1})) \pi_P(g(A_j)^s) \end{aligned}$$

für alle $N \in C$. Dabei ist

$$\begin{aligned} s &= \inf \{t \mid A_1 \chi_P(g(A_1)^t) \\ &+ \sum_{j \geq 2} (A_j - A_{j-1}) \chi_P(g(A_j)^t) \geq \log N\}. \end{aligned}$$

Für unendlich viele $N \in C$ steht das Gleichheitszeichen.

(Man kann diesen Satz auch aus Satz 3.1 herleiten.)

Satz 4.2. F erfülle die Voraussetzungen von Satz 2.2. Dann gilt mit den dortigen Bezeichnungen für beliebiges $\beta > 0$

$$\begin{aligned} \log F(N) &\leq \log f(A_1) \pi_P(g(A_1)^{\tilde{s}}) \\ &+ \sum_{j=2}^{r-1} (\log f(A_j) - \log f(A_{j-1})) \pi_P(g(A_j)^{\tilde{s}}) \\ &+ O(\log^\beta N) \end{aligned}$$

für alle $N \in \mathbb{C}$. Dabei ist

$$r = \min \left\{ k \mid \frac{\log g(A_k)}{\log g(A_1)} < \beta \right\} \quad \text{und}$$

$$\begin{aligned} \tilde{s} &= \inf \left\{ t \mid A_1 \mathcal{V}_P(g(A_1)^t) \right. \\ &\left. + \sum_{j=2}^{r-1} (A_j - A_{j-1}) \mathcal{V}_P(g(A_j)^t) \geq \log N \right\}. \end{aligned}$$

Für unendlich viele $N \in \mathbb{C}$ steht das Gleichheitszeichen.

Für eine spätere Anwendung notieren wir noch

Satz 4.3. Die Funktion F erfülle die Voraussetzungen von Satz 2.2. Dann gilt

(a) Ist $\mathcal{V}_P(x) = c_1 x + O(x \exp(-c\sqrt{\log x}))$,
so gilt für $c_1 \neq 0$

$$\begin{aligned} \log F(N) &\leq c_1 \log f(A_1) \operatorname{li}\left(\frac{\log N}{c_1 A_1}\right) \\ &+ O(\log N \exp(-\tilde{c}\sqrt{\log \log N})) \end{aligned}$$

für alle $N \in \mathbb{C}$.

(b) Ist $\mathcal{V}_P(x) \sim c_2 x$, so gilt für $c_2 \neq 0$

$$\log F(N) \leq \frac{\log f(A_1)}{A_1} \frac{\log N}{\log \log N} \left(1 + \frac{1 + \log(c A_1)}{\log \log^2 N} + o\left(\frac{1}{\log \log N}\right) \right)$$

für alle $N \in C$.

(c) Ist $\mathcal{J}_P(x) = x^{\kappa + o(1)}$, $\kappa \neq 0$, so gilt

$$\log F(N) \leq \kappa \frac{\log f(A_1)}{A_1} \frac{\log N}{\log \log N} (1 + o(1))$$

für alle $N \in C$.

In jedem der drei Fälle steht das Gleichheitszeichen für unendlich viele $N \in C$.

Beweis. Da die Beweise ziemlich ähnlich sind, wollen wir nur Teil (b) beweisen. Es ist analog zu §2

$$\log F(H) = \log f(A_1) \pi_P(g(A_1)^X) + O(g(A_2)^X) \text{ und}$$

$$\log H = A_1 \mathcal{J}_P(g(A_1)^X) + O(g(A_2)^X)$$

und mit Bemerkung 2.3

$$\begin{aligned} \log F(N) &\leq \log F(H) - \delta(\log H - \log N) \\ &= \delta A_1 (\log(g(A_1)^X) \pi_P(g(A_1)^X) \\ &\quad - \mathcal{J}_P(g(A_1)^X)) + \delta \log N + O(g(A_2)^X) \\ &= \delta A_1 \int_1^{g(A_1)^X} \pi_P(t) \frac{dt}{t} + \delta \log N \\ &\quad + O(g(A_2)^X) = \delta A_1 \operatorname{li}(g(A_1)^X) \\ &\quad + o(\delta \operatorname{li}(g(A_1)^X)) + \delta \log N \\ &\quad + O(g(A_2)^X). \end{aligned}$$

Wir wählen nun

$$x = \frac{\log \log N - \log(c A_1)}{\log g(A_1)^{2-1}} .$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \delta = \frac{1}{x} &= \frac{\log g(A_1)}{\log \log N} + \frac{\log g(A_1) \log(c A_1)}{(\log \log N)^2} \\ &+ O\left(\frac{1}{(\log \log N)^3}\right) , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{li}(g(A_1)^x) &= \text{li}\left(\frac{\log N}{c_2 A_1}\right) = \frac{\log N}{c_2 A_1 \log \log N} \\ &+ O\left(\frac{\log N}{(\log \log N)^2}\right) \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \log F(N) &\leq \frac{\log f(A_1)}{A_1} \frac{\log N}{\log \log N} \left(1 + \right. \\ &\left. \frac{1 + \log(c A_1)}{\log \log^2 N} + o\left(\frac{1}{\log \log N}\right)\right) . \end{aligned}$$

In der anderen Richtung haben wir

$$\begin{aligned} \log F(H) &= \delta A_1 \pi_P(g(A_1)^x) \log(g(A_1)^x) \\ &+ O(g(A_2)^x) = \delta A_1 \vartheta_P(g(A_1)^x) \\ &+ c_2 \text{li}(g(A_1)^x) + o(\delta \text{li}(g(A_1)^x)) \\ &+ O(g(A_2)^x) . \end{aligned}$$

$$= \delta \log H + \delta A_1 c_2 \operatorname{li}(g(A_1)^X) + o(\delta \operatorname{li}(g(A_1)^X)) \\ + O(g(A_2)^X).$$

Aus

$$\log H = A_1 \mathcal{J}_P(g(A_1)^X) + O(g(A_2)^X) \\ = c_2 A_1 g(A_1)^X (1 + o(1))$$

folgt

$$x = \frac{\log \log H - \log(c A_1) + o(1)}{\log g(A_1)^{2-1}}$$

und damit

$$\delta = \frac{\log g(A_1)}{\log \log H} + \frac{\log g(A_1) \log(c A_1)}{(\log \log H)^2} \\ + o\left(\frac{1}{(\log \log H)^2}\right).$$

Mit

$$\operatorname{li}(g(A_1)^X) = \frac{\log H (1 + o(1))}{c_2 A_1 \log \log H}$$

folgt schließlich die Behauptung.

Mit Hilfe von Satz 4.3 läßt sich auch eine Abschätzung von $F(R(N))$ für ein Polynom R mit ganzen rationalen Koeffizienten herleiten. Sei

$$P_R = \{p \mid \text{Es gibt eine ganze Zahl } a \text{ mit} \\ p \mid R(a)\}$$

und $\pi_R(x) = \pi_{P_R}(x)$. Ist $R(\alpha) = 0$ und zerfällt R schon in $\mathbb{Q}(\alpha)$, so folgt aus dem Primidealsatz ([7])

$$\pi_R(x) = \frac{1}{\text{grad } R} \text{li } x (1 + O(\exp(-c\sqrt{\log x})))$$

und aus Satz 4.3 die Abschätzung

$$\begin{aligned} \log F(R(N)) \leq \frac{1}{\text{grad } R} \log f(A_1) \text{li} \left(\frac{\log N \text{ grad } R}{A_1} \right) \\ + O(\log N \exp(-\tilde{c}\sqrt{\log \log N})). \end{aligned}$$

Für beliebige Polynome R mit ganzen rationalen Koeffizienten zeigte V. Schulze [12], [13]

Es existiert

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi_R(x) \log x}{x} = c_R.$$

Ist n die Ordnung der Galoisgruppe des Zerfällungskörpers von R und lassen genau r Elemente dieser Galoisgruppe mindestens eine Nullstelle von R fest, so ist $c_R = \frac{r}{n}$.

Damit haben wir

Korollar 4.4.

$$\begin{aligned} \log F(R(N)) \leq \frac{\log f(A_1)}{A_1} \frac{\log N}{\log \log N} (1 + \\ \frac{1 + \log(c_R A_1)}{\log \log N} + o(\frac{1}{\log \log N})). \end{aligned}$$

Wir können nun aber nicht mehr sagen, ob hier für unendlich viele N das Gleichheitszeichen gilt. Dies muß nicht immer der Fall sein. Betrachtet man zum Beispiel das Polynom $R(N) = N^2$, so sieht man, daß in Korollar 4.4 (für dieses Polynom) genau dann für unendlich viele N das Gleichheitszeichen steht, wenn A_1 gerade ist.

§ 5 Anwendung der Ergebnisse aus §4 auf gewisse nicht primzahl-unabhängige Funktionen.

Wir wollen nun Satz 4.3 auf gewisse nicht primzahl-unabhängige multiplikative Funktionen anwenden. Wir zeigen

Satz 5.1. Ist

- (i) F multiplikativ,
- (ii) $P = \bigcup_{i=1}^n P_i$ (P = Menge aller Primzahlen),
 $P_i \cap P_j = \emptyset$ für $i \neq j$,
- (iii) $\pi_{P_i}(x) = c_i \operatorname{li} x + O(x \exp(-c\sqrt{\log x}))$,
 $c_i > 0$,
- (iv) $F(p^\alpha) = f_i(\alpha)$ für $p \in P_i$,
- (v) $f_i(\alpha) \geq 1$ für alle α und es gibt ein (j, β) mit $f_j(\beta) > 1$ und
- (vi) $\log f_i(\alpha) = o\left(\frac{\alpha}{\log \alpha}\right)$,

dann gilt

$$\log F(N) \leq A \operatorname{li}\left(\frac{\log N}{B}\right) + O(\log N \exp(-\tilde{c}\sqrt{\log \log N})),$$

wobei

$$A = \sum_{i \in M} c_i \log f_i(A_1^{(i)}), \quad B = \sum_{i \in M} c_i A_1^{(i)} \quad \text{und}$$

$$M = \left\{ i \mid \frac{\log f_i(A_1^{(i)})}{A_1^{(i)}} \geq \frac{\log f_j(A_1^{(j)})}{A_1^{(j)}} \right\}$$

für $j = 1, \dots, n$.

Für unendlich viele N steht das Gleichheitszeichen.

Wir zeigen zunächst

Lemma 5.2. Für $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ und $\beta_2 > 0$, $x \geq 2\alpha_2$,
 $y \geq 2\beta_2$ und $x+y \geq K(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$ gilt

$$\alpha_1 \operatorname{li}\left(\frac{x}{\alpha_2}\right) + \beta_1 \operatorname{li}\left(\frac{y}{\beta_2}\right) \leq \begin{cases} \alpha_1 \operatorname{li}\left(\frac{x+y}{\alpha_2}\right) + O((x+y)^{1-\tau}) & \text{für } \tau > 0 \\ (\alpha_1 + \beta_1) \operatorname{li}\left(\frac{x+y}{\alpha_2 + \beta_2}\right) + O(1) & \text{für } \tau = 0. \end{cases}$$

Dabei wurde $\tau = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} - \frac{\beta_1}{\beta_2}$ gesetzt.

Beweis. Wir setzen $x+y = z$ und betrachten

$$L(y) = \alpha_1 \operatorname{li}\left(\frac{z-y}{\alpha_2}\right) + \beta_1 \operatorname{li}\left(\frac{y}{\beta_2}\right)$$

im Bereich $2\beta_2 \leq y \leq z - 2\alpha_2$. Für $y = 2\beta_2$

und $y = z - 2\alpha_2$ ist die Behauptung trivial.

Als Funktion von y ist $L(y)$ stetig differenzierbar, für ein Maximum ist also notwendig

$$\frac{dL(y)}{dy} = 0.$$

Setzen wir noch $y = \theta z$, so folgt hieraus

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha_1}{\alpha_2} (\log z + \log \theta - \log \beta_2) \\ &= \frac{\beta_1}{\beta_2} (\log z + \log(1-\theta) - \log \alpha_2). \end{aligned}$$

Für $\tau > 0$ folgt

$$-\log \theta = \tau \log z + O(1)$$

und damit

$$y \leq c' z^{1-\tau},$$

woraus sich sofort die Behauptung ergibt.

Für $\tau = 0$ folgt

$$y = \frac{\beta}{\alpha_2 + \beta_2} z, \quad x = \frac{\alpha}{\alpha_2 + \beta_2} z$$

und man erhält die Behauptung wieder durch Einsetzen, wenn man noch beachtet, daß für $\tau = 0$, $\alpha_2 > \beta_2$ und $z > K(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$

$$\alpha_1 \operatorname{li}\left(\frac{z}{\alpha_2}\right) > \beta_1 \operatorname{li}\left(\frac{z}{\beta_2}\right)$$

gilt.

Beweis von Satz 5.1. Nach Satz 4.3 ist,

wenn wir mit N_i den Teil von N bezeichnen, der nur aus Primzahlen aus P_i besteht,

$$\begin{aligned} \log F(N) \leq \sum_{i=1}^n c_i \log f_i(A_1^{(i)}) \operatorname{li}\left(\frac{\log N_i}{c_i A_1^{(i)}}\right) \\ + O(\log N \exp(-c \sqrt{\log \log N})), \end{aligned}$$

wobei wir noch

$$\log N_i \geq \log N \exp(-c \sqrt{\log \log N})$$

voraussetzen können. Aus Lemma 5.2 folgt

dann die obere Abschätzung aus Satz 5.1.

Zur Abschätzung nach unten betrachtet man die Zahlen

$$N = \prod_{i \in M} \prod_{\substack{p \leq \frac{z}{B} \\ p \in P_i}} p^{A_1^{(i)}}.$$

Diesen Satz kann man nun zum Beispiel anwenden auf die Funktion $r(N)$, die Anzahl der Darstellungen von N als Summe von zwei Quadraten. Es ist

$$(5.1) \quad r(N) = 4 \sum_{d|N} \chi(d),$$

wobei χ der Nichthauptcharakter modulo 4 ist. Definieren wir die multiplikative Funktion δ^+ durch

$$\delta^+(p^\alpha) = \begin{cases} \alpha+1 & \text{für } p \equiv 1 \pmod{4} \\ 1 & \text{sonst,} \end{cases}$$

so ist stets

$$(5.2) \quad r(N) \leq 4 \delta^+(N)$$

$r(N) = 4 \delta^+(N)$, falls N nur aus Primzahlen $p \equiv 1 \pmod{4}$ besteht.

Für die Funktion δ^+ wählen wir nun

$$P_1 = \{p \mid p \equiv 1 \pmod{4}\} \quad \text{und}$$

$$P_2 = \{p \mid p \not\equiv 1 \pmod{4}\}.$$

Dann ist in Satz 5.1 $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$, $A_1^{(1)} = A_2^{(2)} = 1$,

$$\frac{\log f(A_1^{(1)})}{A_1^{(1)} - 1} = \log 2 \quad \text{und} \quad \frac{\log f(A_2^{(2)})}{A_2^{(2)} - 2} = 0,$$

also $A = \frac{\log 2}{2}$, $B = \frac{1}{2}$ und wir erhalten mit (5.2)

Korollar 5.3.

$$\log r(N) \leq \frac{\log 2}{2} \operatorname{li}(2 \log N) + O(\log N \exp(-c \sqrt{\log \log N}))$$

Für unendlich viele N steht das Gleichheitszeichen.

Bemerkung 5.1. Zu (5.1) analoge Formeln

hat man auch für die Anzahl der simultanen Darstellungen einer natürlichen Zahl durch ein vollständiges System nicht äquivalenter quadratischer Formen fester Determinante d (vgl. [16] S.120), so daß wir für diese Anzahlen ähnliche Korollare beweisen könnten. (Die Funktion r ist gerade der Spezialfall $d = -1$.)

§ 6 Bemerkung über die Mittelwerte primzahl -
unabhängiger Funktionen.

Nachdem wir in den ersten Paragraphen die maximale Größenordnung primzahl-unabhängiger multiplikativer Funktionen bestimmt haben, wollen wir nun noch einige Ergebnisse über die durchschnittliche Größenordnung, also über $\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} F(n)$, aufschreiben. Diese Summe wurde für eine große Klasse von Funktionen schon von E. Wirsing [18] behandelt. Er zeigte

Satz 6.1. Ist

- (i) F multiplikativ,
 - (ii) $F(n) \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$,
 - (iii) $F(p^v) \leq \gamma_1 \gamma_2^v$ mit $\gamma_2 < 2$ für $v = 2, 3, \dots$,
 - (iv) $\sum_{p \leq x} F(p) \sim \tau \frac{x}{\log x}$ für $x \rightarrow \infty$,
- so gilt für $x \rightarrow \infty$

$$\sum_{n \leq x} F(n) \sim c_1 \frac{x}{\log x} \exp\left(\sum_{p \leq x} \frac{F(p)}{p}\right).$$

Für primzahl-unabhängige Funktionen erhalten wir damit

Korollar 6.2. Sei F eine multiplikative Funktion, die die Voraussetzungen von Satz 6.1 erfüllt. Weiter sei $F(p) = a$

≥ 0 konstant. Dann gilt

$$\sum_{n \leq x} F(n) \sim c_2 x (\log x)^{a-1}.$$

Hier sollte man aber auch asymptotische Formeln mit Restgliedern beweisen können. Für die Funktionen $d_k(n)$, die Anzahl der Darstellungen von n als Produkt von k natürlichen Zahlen, findet man in [15]

Satz 6.3.

$$\sum_{n \leq x} d_k(n) = x P_k(\log x) + O(x^{\alpha_k + \varepsilon}),$$

wobei P_k ein Polynom vom Grad $k-1$, $\alpha_2 = \frac{27}{82}$, $\alpha_3 = \frac{37}{75}$, $\alpha_k = \frac{k-1}{k+1}$ für $k \geq 4$ und $\varepsilon > 0$ beliebig ist.

(Der Wert von α_2 wurde inzwischen verbessert zu $\alpha_2 = \frac{12}{37}$ [6].)

Dieser Satz läßt sich nun leicht auf eine allgemeinere Klasse von Funktionen ausdehnen. Es gilt

Satz 6.4. Sei F multiplikativ, $F(p) = a \in \mathbb{N}$

konstant und $F(p^v) = O(c_3^v)$ mit einem $c_3 < 2$. Weiter sei σ so gewählt, daß $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ und $2^\sigma > c_3$. Dann ist

$$\sum_{n \leq x} F(n) = x P'_a(\log x) + O(x^{\delta_a + \varepsilon}),$$

wobei P'_a ein Polynom vom Grad $a-1$, $\delta_a = \max(\sigma, \alpha_a)$ und $\varepsilon > 0$ beliebig ist.

Dieser Satz folgt sofort aus Satz 6.3 und den beiden folgenden Lemmata.

Lemma 6.5. Seien f und g multiplikative

Funktionen,

$$\sum_{n \leq x} f(n) = \sum_{j=0}^k c_j x \log^j x + O(x^{\delta_1}) \text{ und}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s} \text{ absolut konvergent f\"ur } \operatorname{Re} s > \delta_2.$$

Dann gilt

$$\sum_{nm \leq x} f(n)g(m) = \sum_{j=0}^k d_j x \log^j x + O(x^{\max(\delta_1, \delta_2) + \varepsilon})$$

f\"ur jedes $\varepsilon > 0$.

Beweis.

$$(6.1) \quad \sum_{m \leq x} g(m) \sum_{n \leq x/m} f(n) = \sum_{m \leq x} g(m) \sum_{j=0}^k c_j \frac{x}{m} \log^j \frac{x}{m} \\ + O(x^{\delta_1} \sum_{m \leq x} \frac{g(m)}{m^{\delta_1}}).$$

F\"ur $\delta_1 > \delta_2$ ist das Restglied $O(x^{\delta_1})$, f\"ur

$\delta_1 \leq \delta_2$ ist

$$(6.2) \quad \sum_{m \leq x} \frac{g(m)}{m^{\delta_1}} \ll \sum_{m \leq x} \frac{g(m)}{m^{\delta_2 + \varepsilon}} m^{\delta_2 + \varepsilon - \delta_1} \ll x^{\delta_2 + \varepsilon - \delta_1}.$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} \sum_{m \leq x} \frac{g(m)}{m} (\log \frac{x}{m})^1 &= \sum_{m \leq x} \frac{g(m)}{m} (\log x - \log m)^1 \\ &= \sum_{j=0}^1 \log^{1-j} x (-1)^j \sum_{m \leq x} \frac{g(m)}{m} \log^j m \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} (6.3) \quad \sum_{m \leq x} \frac{g(m)}{m} \log^j m &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{g(m)}{m} \log^j m \\ &+ O\left(\sum_{m > x} \frac{g(m)}{m^{1-\varepsilon}}\right) = c'_j + O(x^{\delta_2 - 1 + 2\varepsilon}). \end{aligned}$$

Aus (6.1) bis (6.3) folgt schließlich die Behauptung.

Lemma 6.6. Sei $a_{0,p} = 1$, $a_{1,p} = k \in \mathbb{N}$ konstant und $a_{v,p} \ll c_3^v$ mit einem $c_3 < 2$, σ wie in Satz 6.4. Dann konvergiert

$$\prod_{p=2}^{\infty} \left(\sum_{v=0}^{\infty} \frac{a_{v,p}}{p^{vs}} \right) (1 - p^{-s})^k$$

für $\operatorname{Re} s \geq \sigma$ absolut und gleichmäßig.

Beweis. Sei $b_{v,p}^{(0)} = a_{v,p}$ und

$$\sum_{v=0}^{\infty} b_{v,p}^{(n)} p^{-sv} (1 - p^{-s}) = \sum_{v=0}^{\infty} b_{v,p}^{(n+1)} p^{-sv}.$$

Dann kann man durch vollständige Induktion zeigen, daß

$$b_{v,p}^{(k)} \ll_k \max_{i \leq v} (|a_i| + 1) \ll c_3^v + 1.$$

Damit ist für $\text{Re } s \geq \sigma$

$$\sum_{v=0}^{\infty} a_{v,p} p^{-sv} (1 - p^{-s})^k = 1 + \sum_{v=2}^{\infty} b_{v,p}^{(k)} p^{-sv},$$

$$\sum_{v=2}^{\infty} b_{v,p}^{(k)} p^{-\sigma v} \ll \sum_{v=2}^{\infty} \frac{c_v + 1}{p^{\sigma v}} \ll (c_3^2 + 1) p^{-2\sigma} \text{ und}$$

$$\sum_{p=2}^{\infty} (c_3^2 + 1) p^{-2\sigma} < \infty.$$

§ 7 Die maximale Größenordnung bei der Iteration primzahl-unabhängiger multiplikativer Funktionen.

Im zweiten Teil dieser Arbeit wollen wir uns mit der Hintereinanderausführung zweier primzahl-unabhängiger multiplikativer Funktionen beschäftigen (,das heißt wir betrachten $F_1(F_2(N))$ mit primzahl-unabhängigen Funktionen F_i , wobei natürlich $F_2: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ sein muß). Wir beginnen wieder mit der maximalen Größenordnung.

Genügen die Funktionen F_1 und F_2 den Voraussetzungen von Satz 2.2, so haben wir

$$\begin{aligned} \log F_1(F_2(N)) &<< \frac{\log(\exp(c \frac{\log N}{\log \log N}))}{\log \log(\exp(c \frac{\log N}{\log \log N}))} \\ &<< \frac{\log N}{(\log \log N)^2} . \end{aligned}$$

Diese Abschätzung läßt sich nicht wesentlich verbessern. Setzen wir nämlich für $s \in \mathbb{N}$ (alle Funktionen F_i seien multiplikativ)

$$F_1(p^\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \log_s \alpha \text{ nicht definiert} \\ 2^{\left[\frac{\alpha}{\log \alpha \log_s \alpha} \right]} & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei wir mit $\log_s \alpha$ den s -fach iterierten Logarithmus von α bezeichnen, so ist

$$\log F_1(p^\alpha) \ll \frac{\alpha}{\log \alpha \log_s \alpha} = o\left(\frac{\alpha}{\log \alpha}\right),$$

F_1 genügt also den Voraussetzungen von Satz 2.2,
und für $N = 2^m$ ist

$$\begin{aligned} \log F_1(F_2(N)) &= \log 2 \cdot \left[\frac{m}{\log m \log_s m} \right] \\ &\quad \cdot \left(\log \left[\frac{m}{\log m \log_s m} \right] \log_s \left[\frac{m}{\log m \log_s m} \right] \right)^{-1} \\ &\sim \frac{\log N}{(\log \log N)^2 \log_{s+1}^2 N}. \end{aligned}$$

Diese Größenordnung wird aber von den meisten
Funktionen nicht erreicht. Als extremes Beispiel
betrachten wir

$$F_2(p^\alpha) = \begin{cases} 2 & \text{für } \alpha = 1 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$F_3(p^\alpha) = 2^\alpha.$$

Dann ist

$$\log F_2(F_3(N)) = \begin{cases} \log 2 & \text{für } N \text{ Primzahl} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese beiden Funktionen passen offenbar ganz
schlecht zusammen. Setzen wir aber

$$F_4(p^\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{für } \alpha = 1, 2 \\ \prod_{k(\alpha-1) < i \leq k(\alpha)} p_i & \text{sonst} \end{cases}$$

mit $k(\alpha) = \frac{\alpha^2}{\log^3 \alpha}$, so ist zwar

$$\log F_4(p^\alpha) \ll \int_{k(\alpha-1)}^{k(\alpha)} \log u \, du \ll \frac{\alpha}{\log^2 \alpha},$$

also insbesondere $\ll \log F_3(p^\alpha)$, aber für $N = \prod_{i=1}^r p_i$ ist

$$\log F_2(F_4(N)) \gg \log 2^{k(r)} \gg \frac{r^2}{\log^3 r}$$

und

$$\log N \sim \int_1^r u \log u \, du \sim \frac{1}{2} r^2 \log r,$$

also

$$\log F_2(F_4(N)) \gg \frac{\log N}{(\log \log N)^4}.$$

Betrachten wir nun einmal die Funktion F_2 als innere Funktion. Dann ist $F_2(N)$ stets eine Potenz von 2, das heißt die maximale Größenordnung von $\log F(F_2(N))$ hängt ab von dem Wachstum der Funktion F auf den Potenzen von

2 und hierüber haben wir (außer einer oberen Abschätzung) keinerlei Voraussetzungen, so daß wir auch hier keine einheitlichen Ergebnisse erwarten können.

Dies wird natürlich besser, wenn wir eine innere Funktion wählen, die sehr viele verschiedene Zahlen, insbesondere aber die Zahlen $N = \prod_{i=1}^r p_i^A$, für die ja die äußere Funktion maximal wird, darstellt. Als Beispiel untersuchen wir nun genauer den Fall, wo die innere Funktion die Teilerfunktion ist. Wir zeigen

Satz 7.1. Ist F eine multiplikative Funktion mit

$$(i) \quad F(p^\alpha) = f(\alpha),$$

$$(ii) \quad f(\alpha) \geq 1 \text{ und es gibt ein } \beta \text{ mit } f(\beta) > 1 \text{ und}$$

$$(iii) \quad \log f(\alpha) = O(\log \alpha),$$

so gilt für beliebiges $\varepsilon > 0$ und $N \geq N_0(\varepsilon)$

$$\log F(d(N)) \leq \tau \sqrt{2} 2(1 + \varepsilon) \frac{\sqrt{\log N}}{\log \log N}$$

und es gibt unendlich viele N mit

$$\log F(d(N)) \geq \tau \sqrt{2} 2(1 - \varepsilon) \frac{\sqrt{\log N}}{\log \log N}.$$

Dabei ist

$$\tau = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \sup_{(\alpha_i) \in \mathbb{N}^{(r)}} \frac{\frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \log f(\alpha_i) \sqrt{\sum_{i=1}^r p_i}}{\sqrt{\sum_{i=1}^r \alpha_i (p_i - 1)}}.$$

Beweis. Wir wollen zunächst

$$(7.1) \quad 0 < \tau < \infty$$

zeigen. Die linke Ungleichung ist klar, wenn wir alle $\alpha_i = \alpha$ für ein α mit $f(\alpha) > 1$ wählen.

Für die rechte Ungleichung setzen wir

$$(7.2) \quad x = \sum_{i=1}^r \alpha_i p_i, \quad u = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \log p_i \quad \text{und} \\ v = \sum_{i=1}^r p_i.$$

Dann ist wegen

$$\left(\prod_{i=1}^r \alpha_i p_i \right)^{1/r} \leq \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \alpha_i p_i$$

$$(7.3) \quad \frac{\left(\frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \log f(\alpha_i) \right)^2 \sum_{i=1}^r p_i}{\sum_{i=1}^r \alpha_i (p_i - 1)} \\ << \frac{\left(\frac{1}{r} \sum_{i=1}^r (\log(\alpha_i p_i) - \log p_i) \right)^2 v}{x} \\ << \frac{\left(\log \frac{x}{r} - u \right)^2 v}{x}.$$

Wir betrachten nun die rechte Seite als Funktion von x im Bereich $x \geq v$. Differenzieren zeigt, daß wir nur Extremwerte haben können für $\log \frac{x}{r} - u = 2$ und $\log \frac{x}{r} - u = 0$. An beiden

Stellen ist

$$\frac{(\log \frac{x}{r} - u)^2 v}{x} \leq 4.$$

Für $x \rightarrow \infty$ geht dieser Ausdruck gegen Null, womit wir (7.1) bewiesen haben.

Nun wollen wir die zweite Behauptung des Satzes herleiten. Wir wählen dazu für festes r die α_i so, daß

$$\frac{(\frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \log f(\alpha_i))^2 \sum_{i=1}^r p_i}{\sum_{i=1}^r \alpha_i (p_i - 1)}$$

maximal wird. Dieses Maximum existiert, da für $\max \alpha_i = r^\delta$ mit $\delta \geq 4$ dieser Ausdruck abgeschätzt werden kann durch

$$O\left(\frac{\log(\max \alpha_i + 1) r^2 \log r}{\max \alpha_i}\right) = O\left(\frac{1}{r}\right)$$

und wir müssen also für festes r nur endlich viele Zahlen vergleichen. Wir können nun

$$(7.4) \quad \frac{(\sum_{i=1}^r \log f(\alpha_i))^2}{\sum_{i=1}^r \alpha_i (p_i - 1)} \geq \frac{(\sum_{i=1}^r \log f(\alpha))^2}{\sum_{i=1}^r \alpha (p_i - 1)} \geq c \frac{1}{\log r}$$

annehmen, wobei α eine natürliche Zahl mit $f(\alpha) > 1$ ist. Hieraus wollen wir nun eine obere Abschätzung für $\sum_{i=1}^r \alpha_i$ herleiten. Aus (7.4) folgt

$$(7.5) \quad \left(\sum_{i=1}^r \log f(\alpha_i) \right)^2 \geq c \frac{1}{\log r} \sum_{i=1}^r \alpha_i (p_i - 1) \\ \geq c' r^2$$

und mit $\max \alpha_i \leq r^4$

$$(7.6) \quad \sum_{i=1}^r \alpha_i (p_i - 1) \ll \left(\sum_{i=1}^r \log f(\alpha_i) \right)^2 \log r \\ \ll r^2 \log^3 r.$$

Weiter ist nach Wahl der α_i und wegen (7.5)

$$\frac{\left(\sum_{i=1}^r \log f(\alpha_i) \right)^2}{\sum_{i=1}^r \alpha_i (p_i - 1)} \geq \frac{\left(\sum_{i=1}^r \log f(\alpha_i) + (\log f(\alpha) - \log f(\alpha_k)) \right)^2}{\sum_{i=1}^r \alpha_i (p_i - 1) - (\alpha_k - \alpha)(p_k - 1)} \\ = \frac{\left(\sum_{i=1}^r \log f(\alpha_i) \right)^2 \left(1 + O\left(\frac{\log r}{r}\right) \right)}{\sum_{i=1}^r \alpha_i (p_i - 1) - (\alpha_k - \alpha)(p_k - 1)}$$

und hieraus folgt mit (7.6)

$$(\alpha_k - \alpha)(p_k - 1) \ll \sum_{i=1}^r \alpha_i (p_i - 1) O\left(\frac{\log r}{r}\right) \ll r \log^4 r,$$

also

$$(7.7) \quad \alpha_k \ll \frac{1}{p_k} r \log^4 r$$

und

$$(7.8) \quad \sum_{i=1}^r \alpha_i \ll r \log^5 r.$$

Wir wählen nun

$$N = \prod_{i=1}^k p_i^{d_i},$$

wobei $k = \sum_{i=1}^r \alpha_i$ und $d_i \in \{p_i \mid 1 \leq i \leq r\}$ ist.

Dabei soll unter den d_i das p_i genau α_i -mal vorkommen. Dann ist mit (7.8)

$$\begin{aligned} \log N &= \sum_{i=1}^k d_i \log p_i \leq \log p_k \sum_{i=1}^r \alpha_i p_i \\ &\leq (1+\varepsilon) \log r \sum_{i=1}^r \alpha_i p_i \\ &\leq (1+\varepsilon') \log r \sum_{i=1}^r \alpha_i (p_i - 1) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \log F(d(N)) &= \log F\left(\prod_{i=1}^k d_i\right) \\ &= \log F\left(\prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i}\right) \\ &= \sum_{i=1}^r \log f(\alpha_i) \\ &= \frac{\sqrt{\log r \sum_{i=1}^r \alpha_i (p_i - 1)}}{2 \log r} \frac{\frac{2r \log r}{\sqrt{\sum_{i=1}^r p_i \log r}}}{\sqrt{\sum_{i=1}^r \alpha_i (p_i - 1)}} \frac{\frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \log f(\alpha_i) \sqrt{\sum_{i=1}^r p_i}}{\sqrt{\sum_{i=1}^r \alpha_i (p_i - 1)}} \end{aligned}$$

$$\geq (1-\varepsilon) \frac{\sqrt{\log N}}{2 \log r} \sqrt{2} 2\tau \geq (1-\varepsilon') \frac{\sqrt{\log N}}{\log \log N} \sqrt{2} 2\tau,$$

denn aus

$$\log N \geq c \sum_{i=1}^r p_i \geq c' r^2 \log r$$

folgt

$$\log \log N \geq (1-\varepsilon) 2 \log r.$$

Wir kommen nun zum Beweis der oberen Abschätzung aus Satz 7.1. Sei

$$J(n) = \min_{d(m)=n} m.$$

Wir setzen nun $d(N) = h$ und schätzen $J(h)$ nach unten und $F(h)$ nach oben ab. Sei

$$h = \prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i}, \quad J(h) = \prod_{i=1}^k p_i^{d_i-1} \quad (h = \prod_{i=1}^k d_i).$$

Betrachten wir zunächst den Fall

$$(7.9) \quad \max \alpha_i = e^{\beta r} \text{ mit einem } \beta \geq 1.$$

Dann ist

$$(7.10) \quad \log F(h) = \sum_{i=1}^r \log f(\alpha_i) \ll \beta r^2$$

und

$$(7.11) \quad \log J(h) \geq \log h \geq e^{\beta r} \log 2,$$

also

$$(7.12) \quad \log F(d(N)) \ll (\log \log N)^2.$$

Wir können deshalb

$$(7.13) \quad \max \alpha_i \leq e^r$$

annehmen. Für beschränktes r bleibt dann aber auch $F(d(N))$ beschränkt, so daß wir im Folgenden immer r als genügend groß annehmen können.

Ist nun $k \geq r^7$, so gilt wegen

$$(7.14) \quad \log h = \sum_{i=1}^r \alpha_i \log p_i \ll \max \alpha_i \cdot r \log r$$

für $\max \alpha_i$ die Abschätzung

$$(7.15) \quad \max \alpha_i \geq \frac{\log h}{r \log r} \geq \frac{k}{r \log r} \gg r^5$$

und damit

$$(7.16) \quad \log J(h) \geq \log h \geq \log 2 \max \alpha_i \gg r^5.$$

Andererseits ist

$$(7.17) \quad \log F(h) = \sum_{i=1}^r \log f(\alpha_i) \ll r(\log(\max \alpha_i + 1)) \\ \ll r^2.$$

Aus (7.16) und (7.17) folgt (für $k \geq r^7$)

$$(7.18) \quad \log F(d(N)) \ll (\log N)^{2/5}.$$

Wir können also nun auch

$$(7.19) \quad k \leq r^7$$

annehmen. Man zeigt leicht ([2]), daß für jeden echten Teiler t von d_i die Beziehung

$$(7.20) \quad p_i^t < p_{k+1}$$

gilt. Wegen (7.19) kommen deshalb alle p_i mit $\frac{r}{2} \leq i \leq r$ unter den d_i vor und wir haben

$$(7.21) \quad k \geq \frac{r}{2}.$$

Weiter folgt aus (7.20)

$$(7.22) \quad d_i \text{ ist Primzahl oder } 2^{\sqrt{d_i}} < p_{k+1} \ll r^8,$$

also

$$(7.23) \quad d_i \ll r \log r.$$

Damit ist für $s = \frac{r}{\log^{10} r}$

$$\begin{aligned} (7.24) \quad \log J(h) &= \sum_{i=1}^k (d_i - 1) \log p_i \\ &\geq \log p_s \sum_{s \leq i \leq k} (d_i - 1) \\ &= \log p_s \sum_{i=1}^k (d_i - 1) + O\left(\sum_{i \leq s} (d_i - 1) \log r\right) \\ &\geq (1 - \varepsilon) \log r \sum_{i=1}^k (d_i - 1), \end{aligned}$$

denn

$$(7.25) \quad \sum_{i \leq s} (d_i - 1) \ll \frac{r^2}{\log^9 r}$$

und

$$\begin{aligned} (7.26) \quad \sum_{i=1}^k (d_i - 1) &\geq \sum_{i=1}^r \alpha_i (p_i - 1) \\ &\gg \sum_{i=1}^r i \log i \gg r^2 \log r. \end{aligned}$$

Aus (7.24) und (7.26) folgt nun

$$(7.27) \quad \log J(h) \geq (1-\varepsilon) \log r \sum_{i=1}^r \alpha_i (p_i - 1).$$

Damit ist

$$\begin{aligned} (7.28) \quad \log F(h) &= \sum_{i=1}^r \log f(\alpha_i) \\ &= \frac{\sqrt{\log r \sum_{i=1}^r \alpha_i (p_i - 1)}}{2 \log r} \cdot \frac{2r \log r}{\sqrt{\sum_{i=1}^r p_i \log r}} \cdot \frac{\frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \log f(\alpha_i) \sqrt{\sum_{i=1}^r p_i}}{\sqrt{\sum_{i=1}^r \alpha_i (p_i - 1)}} \\ &= X \cdot Y \cdot Z. \end{aligned}$$

Wir zeigen zunächst, daß wir

$$(7.29) \quad 2 \log r \geq \log \log J(h) (1-\varepsilon)$$

annehmen können. Es ist

$$(7.30) \quad \sum_{i=1}^r \alpha_i \leq k \leq r^7$$

und damit

$$(7.31) \quad \log F(h) \ll r \log r.$$

Aus $\log \log J(h) > (1+\varepsilon') 2 \log r$ folgt

$$(7.32) \quad \log J(h) > r^{2(1+\varepsilon')}$$

und damit wäre

$$(7.33) \quad \log F(d(N)) \ll (\log N)^{1/2 - \delta}$$

mit einem $\delta > 0$.

Mit (7.27) und (7.29) erhalten wir

$$(7.34) \quad X \leq \frac{\sqrt{\log J(h)}}{\log \log J(h)} (1+\varepsilon).$$

Aus dem Primzahlsatz folgt

$$(7.35) \quad Y \leq (1+\varepsilon)\sqrt{2}.$$

Schließlich ist auch

$$(7.36) \quad Z \leq (1+\varepsilon)\tau,$$

womit Satz 7.1 vollständig bewiesen ist.

§ 8 Mittelwerte bei der Iteration primzahl -
unabhängiger multiplikativer Funktionen.

In seiner Arbeit "On the iteration of the
divisor-function" [5] zeigte I. Kátaí unter
anderem

$$\sum_{n \leq x} d(d(n)) = c_1 x \log \log x + O(x \log \log \log x).$$

Man könnte dieses Ergebnis etwa so inter-
pretieren : Die durchschnittliche Größen-
ordnung von $d(n)$ ist $\log n$ ($\sum_{n \leq x} d(n) \sim x \log x$),
also ist die durchschnittliche Größenordnung
der iterierten Teilerfunktion der iterierte
Logarithmus. Daß diese Interpretation zu einfach
ist, zeigt sich, wenn man andere Funktionen
betrachtet. So zeigte G.J. Rieger [11]

$$\sum_{n \leq x} \omega(d(n)) = c_2 x + O(x^{1/2} \log^5 x),$$

$$\sum_{n \leq x} \Omega(d(n)) = c_3 x \log \log x + c_4 x + O\left(\frac{x}{\log x}\right),$$

$$\sum_{n \leq x} d(d(n)) = c_1 x \log \log x + c_9 x + O\left(\frac{x}{\log x}\right),$$

$$\sum_{n \leq x} u^2(d(n)) = c_{10} \frac{x}{\log x} + O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right) \text{ und}$$

$$\sum_{n \leq x} r(d(n)) = c_{11} x + O(x^{1/2 + \varepsilon}) \text{ mit}$$

beliebigem $\varepsilon > 0$.

Unabhängig hiervon bewies der Verfasser [4]

$$\sum_{n \leq x} d(d(n)) = a x \log \log x + \sum_{\alpha=0}^{N(x)} a_{\alpha} x \log^{-\alpha} x \\ + O(x \exp(-c \sqrt{\log x})),$$

$$\sum_{n \leq x} \phi(d(n)) = b x \log \log x + \sum_{\alpha=0}^{N(x)} b_{\alpha} x \log^{-\alpha} x \\ + O(x \exp(-c \sqrt{\log x})) \text{ und}$$

$$\sum_{n \leq x} \omega(d(n)) = c_0 x + O(x^{1/2} \log^5 x),$$

wobei $N(x) = [\sqrt{\log x}]$ ist. Unter Annahme der Richtigkeit der Riemannschen Vermutung kann man in den beiden ersten asymptotischen Formeln das Restglied durch $O(x^{3/4} \log^{131} x)$ bzw. $O(x^{3/4} \log^{11} x)$ ersetzen, wenn man $N(x) = [\frac{1}{4} \log x]$ wählt.

Nun wäre zum Beispiel nach obiger Erklärung die durchschnittliche Größenordnung von $d(n)$ der $\log n$ und von $\omega(n)$ der $\log \log n$, was zur Vermutung

$$\sum_{n \leq x} \omega(d(n)) \sim c x \log \log \log x$$

führt. Dies ist aber offenbar falsch.

Eine bessere Argumentation ist die folgende :
 Die Ergebnisse des §6 lassen sich interpretieren
 als "die meisten Zahlen sind fast quadratfrei".
 Für eine quadratfreie Zahl m ist $d(m) = 2^{\omega(m)}$.
 Ist nun $F(2^\alpha) \sim \alpha^g$, so wird also (falls sich
 F auf den von 2^α verschiedenen Zahlen nicht
 "allzu schlecht" verhält)

$$\sum_{n \leq x} F(d(n)) \sim c \sum_{m \leq x} \omega^g(m) \sim c' x (\log \log x)^g.$$

Der nächste Satz zeigt, daß diese Erklärung
 der oben zitierten Ergebnisse weitgehend
 richtig ist.

Satz 8.1. Sei $F_2 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ multiplikativ, $F_2(p)$

$$= \prod_{i=1}^r p_i^{s_i} \text{ konstant für alle Primzahlen } p$$

und $F_1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ multiplikativ oder additiv

mit $F_1(p_i^m) = P_i(m)$, wobei P_i ein Polynom

vom Grad g_i ist. Weiter sei $F_i(n) \ll n^{\alpha_i}$

mit $\alpha_1 \alpha_2 < \frac{1}{2}$. Dann gilt mit

$$g = \begin{cases} \max_{i \leq r} g_i & \text{für additives } F_1 \\ \sum_{i=1}^r g_i & \text{für multiplikatives } F_1 \end{cases}$$

die asymptotische Formel

$$\sum_{n \leq x} F_1(F_2(n)) = \sum_{l=0}^g c_l x (\log \log x)^l + O\left(\frac{x (\log \log x)^g}{\log x}\right).$$

Zum Beweis benötigen wir das

Lemma 8.2. Sei

$$T_1(y, K) = \sum_{\substack{m \leq y \\ (m, K)=1}} u^2(m) w^1(m) \quad \text{und}$$

$$A_K = \frac{1}{\zeta(2)} \prod_{p|K} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{-1}.$$

Dann gilt für $y \geq \frac{3}{2}$

$$T_1(y, K) = A_K y \sum_{j=0}^1 P_j^1(K) (\log \log y)^j + O(d(K) y \frac{(\log \log y)^1}{\log y}).$$

Dabei ist $P_1^1(K) = 1$ und

$$P_j^1(K) = \sum_{\substack{(s_i) \in (\mathbb{N}_0 \setminus \{0\})^{(1)} \\ \sum i s_i \leq 1-j}} d_{s_1, \dots, s_1}^1 \prod_{i=1}^1 \left(\sum_{p|K} (p+1)^{-i} \right)^{s_i}.$$

Beweis. Wir zeigen

$$i) \quad T_0(y, K) = A_K y + O(d(K) y^{1/2}),$$

$$ii) \quad T_{n+1}(y, K) = \sum_{\substack{p \leq y \\ p \nmid K}} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} T_j\left(\frac{y}{p}, pK\right),$$

$$\text{iii)} \quad \sum_{p \leq \frac{2y}{3}} \frac{1}{p \log y/p} \ll \frac{\log \log y}{\log y},$$

$$\text{iv)} \quad \sum_{p \leq \frac{2y}{3}} \frac{(\log \log y/p)^m}{p+1} = \sum_{j=0}^{m+1} c_{mj} (\log \log y)^j + O\left(\frac{(\log \log y)^m}{\log y}\right)$$

$$\text{mit } c_{m,m+1} = 1,$$

$$\text{v)} \quad \sum_{p \leq \frac{2y}{3}} \frac{(\log \log y/p)^m}{(p+1)^k} = d_{mk} (\log \log y)^m + O\left(\frac{(\log \log y)^{m-1}}{\log y}\right)$$

für $k \geq 2$,

$$\text{vi)} \quad \sum_{\substack{p \leq \frac{2y}{3} \\ p|K}} \frac{(\log \log y/p)^m}{(p+1)^k} = (\log \log y)^m \sum_{p|K} \frac{1}{(p+1)^k} + O\left(\frac{(\log \log y)^{m-1}}{\log y} \omega(K)\right)$$

für $k \geq 1$ und

vii) Nach diesen Vorbereitungen zeigen wir dann in vii) die Behauptung durch vollständige Induktion.

Zu i) Das ist gerade Lemma 2 in [4].

$$\begin{aligned} \text{Zu ii)} \quad T_{n+1}(y, K) &= \sum_{\substack{m \leq y \\ (m, \overline{K})=1}} \mu^2(m) \omega^{n+1}(m) \\ &= \sum_{\substack{m \leq y \\ (m, \overline{K})=1}} \mu^2(m) \omega^n(m) \sum_{p|m} 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{\substack{p \leq y \\ p \nmid K}} \sum_{\substack{m \leq y \\ (m, K)=1 \\ p \mid m}} u^2(m) \omega^n(m) \\
 &= \sum_{\substack{p \leq y \\ p \nmid K}} \sum_{\substack{m' \leq y/p \\ (m', p, K)=1}} u^2(m'p) \omega^n(m'p) \\
 &= \sum_{\substack{p \leq y \\ p \nmid K}} \sum_{\substack{m' \leq y/p \\ (m', pK)=1}} u^2(m') \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \omega^j(m') \\
 &= \sum_{\substack{p \leq y \\ p \nmid K}} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} T_j\left(\frac{y}{p}, pK\right).
 \end{aligned}$$

Zu iii) $\sum_{p \leq \frac{2y}{3}} \frac{1}{p \log y/p}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\log y} \sum_{p \leq \frac{2y}{3}} \frac{1}{p} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\log p}{\log y} \right)^m \\
 &= \frac{1}{\log y} \sum_{m \leq c} \log y \log \log y \log^{-m} y \sum_{p \leq \frac{2y}{3}} \frac{\log^m p}{p} \\
 &+ \frac{1}{\log y} \sum_{p \leq \frac{2y}{3}} \frac{1}{p} \left(\frac{\log p}{\log y} \right)^{[c \log y \log \log y] + 1} \\
 &\cdot \left(1 - \frac{\log p}{\log y} \right)^{-1}.
 \end{aligned}$$

Für die zweite Summe haben wir die Abschätzung

$$\left(1 - \frac{\log p}{\log y} \right)^{-1} \leq \left(1 - \frac{\log 2y/3}{\log y} \right)^{-1} \ll \log y,$$

$$\left(\frac{\log p}{\log y} \right) [c \log y \log \log y] + 1$$

$$\leq \left(1 + \frac{\log 2/3}{\log y} \right) c \log y \log \log y + 1 = L \text{ und}$$

$$\log L = c \log y \log \left(1 + \frac{\log 2/3}{\log y} \right) \log \log y$$

$$= c \log y \log \log y \left(\frac{\log 2/3}{\log y} + O\left(\frac{1}{\log^2 y} \right) \right)$$

$$\leq -2 \log \log y \text{ für } c \text{ groß genug.}$$

Damit können wir die zweite Summe abschätzen durch

$$O\left(\frac{1}{\log y} \sum_{p \leq y} \frac{1}{p} \frac{1}{\log^2 y} \log y \right) = O\left(\frac{\log \log y}{\log^2 y} \right).$$

Es ist

$$\sum_{p \leq y} \frac{\log^m p}{p} = \frac{\log^m y}{y} \pi(y) - \int_2^y \frac{m \log^{m-1} u - \log^m u}{u^2} du \pi(u)$$

$$\leq \frac{\log^m y}{y} \pi(y) + \int_2^y \frac{\log^m u}{u^2} \pi(u) du$$

$$<< \log^{m-1} y + \frac{1}{m} \log^m y.$$

Damit ist die erste Summe

$$O\left(\frac{1}{\log y} \sum_{m \leq c} \log y \log \log y \log^{-m} y (\log^{m-1} y \right.$$

$$\left. + \frac{1}{m} \log^m y) \right) = O\left(\frac{\log \log y}{\log y} \right).$$

$$\begin{aligned}
 \text{Zu iv)} \quad & \sum_{p \leq \frac{2y}{3}} \frac{(\log \log y / p)^m}{p+1} \\
 &= \sum_{p \leq \frac{2y}{3}} \frac{(\log \log y + \log(1 - \frac{\log p}{\log y}))^m}{p+1} \\
 &= \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} (\log \log y)^{m-j} \sum_{p \leq \frac{2y}{3}} \frac{\log^j(1 - \frac{\log p}{\log y})}{p+1} .
 \end{aligned}$$

Wir setzen nun für $m \geq 1$

$$g(u) = \log^m(1 - \frac{\log u}{\log y}) .$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
 \sum_{p \leq \frac{2y}{3}} \frac{g(p)}{p+1} &= g(\frac{2y}{3}) \sum_{p \leq \frac{2y}{3}} \frac{1}{p+1} \\
 &- \frac{2y}{3} \int_2^{\frac{2y}{3}} g'(u) \sum_{p \leq u} \frac{1}{p+1} du \\
 &= \log \log \frac{2y}{3} g(\frac{2y}{3}) + c g(\frac{2y}{3}) + O\left(\frac{g(\frac{2y}{3})}{\log^3 y}\right) \\
 &- \frac{2y}{3} \int_2^{\frac{2y}{3}} \log \log u g'(u) du - c \frac{2y}{3} \int_2^{\frac{2y}{3}} g'(u) du \\
 &+ O\left(\frac{2y}{3} \int_2^{\frac{2y}{3}} \frac{g'(u)}{\log^3 u} du\right) \\
 &= \frac{2y}{3} \int_2^{\frac{2y}{3}} \frac{g(u)}{u \log u} du + c g(2) + O\left(\frac{g(\frac{2y}{3})}{\log^3 u}\right)
 \end{aligned}$$

$$+ O\left(\frac{2y}{3} \int_2^{\frac{2y}{3}} \frac{g'(u)}{\log^3 u} du\right).$$

Es ist

$$g(2) = \log^m\left(1 - \frac{\log 2}{\log y}\right) \ll \left(\frac{1}{\log y}\right)^m \text{ und}$$

$$g'(u) = -m \log^{m-1}\left(1 - \frac{\log u}{\log y}\right) \frac{1}{u \log y}.$$

Für $u \leq y^{1/2}$ ist dies

$$O\left(\frac{1}{u \log y}\right)$$

und damit

$$\int_2^{y^{1/2}} \frac{g'(u)}{\log^3 u} du \ll \frac{1}{\log y}.$$

Für $u \geq y^{1/2}$ ist

$$\int_{y^{1/2}}^{\frac{2y}{3}} \frac{g'(u)}{\log^3 u} du \ll \frac{1}{\log^3 y} g\left(\frac{2y}{3}\right)$$

$$= \frac{\log^m\left(\frac{\log 2/3}{\log y}\right)}{\log^3 y} \ll \frac{(\log \log y)^m}{(\log y)^3}.$$

Es bleibt also noch

$$\int_2^{\frac{2y}{3}} \frac{g(u)}{u \log u} du$$

zu behandeln.

Für $|z| < 1$ ist

$$\log^m(1-z) = (-1)^m \sum_{l=1}^{\infty} f(l,m) z^l$$

mit

$$f(l,m) = \sum_{\substack{\sum_{i=1}^m v_i = l \\ v_i \geq 1}} \prod_{i=1}^m v_i^{-1}.$$

Mit vollständiger Induktion zeigt man leicht

$$f(l,m) \ll \frac{\log^{m-1} l}{l}.$$

Es ist

$$\begin{aligned} g(u) &= \log^m \left(1 - \frac{\log u}{\log y} \right) \\ &= (-1)^m \sum_{l=1}^{\infty} f(l,m) \left(\frac{\log u}{\log y} \right)^l \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \int_2^{\frac{2y}{3}} \frac{g(u)}{u \log u} du &= (-1)^m \sum_{l=1}^{\infty} f(l,m) \log^{-l} y \int_2^{\frac{2y}{3}} \frac{\log^{l-1} u}{u} du \\ &= (-1)^m \sum_{l=1}^{\infty} f(l,m) \log^{-l} y \left(\frac{1}{l} \log^l \left(\frac{2y}{3} \right) - \frac{\log^l 2}{l} \right) \\ &= (-1)^m \sum_{l=1}^{\infty} \frac{f(l,m)}{l} \left(\left(1 + \frac{\log 2/3}{\log y} \right)^l - \left(\frac{\log 2}{\log y} \right)^l \right). \end{aligned}$$

Der Ausdruck in der (äußeren) Klammer ist

$O(1)$ und gleich $1 + O\left(\frac{1}{\log y}\right)$. Damit können

wir die Summe aufspalten in

$$\sum_{1 \leq \log^2 y} \frac{f(1, m)}{1} (1 + O(\frac{1}{\log y}))$$

$$= c + O(\frac{(\log \log y)^m}{\log y})$$

und

$$\sum_{1 > \log^2 y} \frac{f(1, m)}{1} O(1) = O(\frac{(\log \log y)^m}{\log^2 y}).$$

Zu v) Für $p \leq \log^3 y$ ist $\log \log y/p = \log \log y$
 $+ O(\frac{\log \log y}{\log y})$ und damit (für $k \geq 2$)

$$\sum_{p \leq \log^3 y} \frac{(\log \log y/p)^m}{(p+1)^k}$$

$$= c (\log \log y)^m + O(\frac{(\log \log y)^{m-1}}{\log y}),$$

während

$$\sum_{p > \log^3 y} \frac{(\log \log y/p)^m}{(p+1)^k} \ll (\log \log y)^m \log^{-3} y$$

ist.

Zu vi) $\sum_{\substack{p \leq \frac{2y}{3} \\ p \mid K}} \frac{(\log \log y/p)^m}{(p+1)^k}$

$$= (\log \log y + O(\frac{\log \log y}{\log y}))^m \sum_{\substack{p \leq \log^3 y \\ p \mid K}} \frac{1}{(p+1)^k}$$

$$+ O((\log \log y)^m \sum_{\substack{p \mid K \\ p > \log^3 y}} \frac{1}{(p+1)^k})$$

$$= (\log \log y)^m \sum_{p|K} \frac{1}{(p+1)^k} + O\left(\frac{(\log \log y)^{m-1}}{\log y} \omega(K)\right).$$

Zu vii) Nach i) ist die Behauptung richtig für $n = 0$. Für den Induktionsschritt von n auf $n+1$ müssen wir nach ii)

$$\sum_{\substack{p \nmid K \\ p \leq y}} T_1\left(\frac{y}{p}, pK\right) = \sum_{\substack{p \nmid K \\ p \leq \frac{2y}{3}}} T_1\left(\frac{y}{p}, pK\right) + \sum_{\substack{p \nmid K \\ \frac{2y}{3} < p \leq y}} T_1\left(\frac{y}{p}, pK\right)$$

für $1 \leq n$ betrachten. In der zweiten Summe ist $T_1(y/p, pK) \leq T_1(3/2, pK) = O(1)$ und damit ist diese Summe $O(\frac{y}{\log y})$. In die erste Summe setzen wir die Asymptotik für $T_1(y/p, pK)$ ein.

Wir betrachten nun einen Summanden

$$\sum_{\substack{p \nmid K \\ p \leq \frac{2y}{3}}} \frac{y}{p} A_{pK} (\log \log y/p)^m \prod_{i=1}^1 \left(\sum_{q|pK} (q+1)^{-i} \right)^{v_i},$$

wobei $\sum_{i=1}^1 v_i i \leq 1-m$ ist. Es ist wegen $p \nmid K$

$$\left(\sum_{q|pK} (q+1)^{-i} \right)^{v_i} = \sum_{w=0}^{v_i} \binom{v_i}{w} (p+1)^{-iw} \left(\sum_{q|K} (q+1)^{-i} \right)^{v_i - w}.$$

Damit wird

$$\prod_{i=1}^1 \left(\sum_{q|pK} (q+1)^{-i} \right)^{v_i} = \sum_{k=0}^1 (p+1)^{-k} Q_k$$

mit

$$Q_k = \sum_{\substack{(r_i) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^{(1)} \\ \sum_{i=1}^1 i r_i \leq 1-m-k}} b_{r_1, \dots, r_1}^{(k)} \prod_{i=1}^1 \left(\sum_{q|K} (q+1)^{-i} \right)^{r_i}.$$

Weiter ist

$$A_{pK} = A_K \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{-1}.$$

Wir müssen also

$$y A_K \sum_{k=0}^1 Q_k \sum_{\substack{p \nmid K \\ p \leq \frac{2y}{3}}} \frac{(\log \log y/p)^m}{(p+1)^{k+1}}$$

behandeln. Nun ist

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{p \nmid K \\ p \leq \frac{2y}{3}}} \frac{(\log \log y/p)^m}{(p+1)^{k+1}} \\ &= \sum_{p \leq \frac{2y}{3}} \frac{(\log \log y/p)^m}{(p+1)^{k+1}} - \sum_{\substack{p \leq \frac{2y}{3} \\ p \mid K}} \frac{(\log \log y/p)^m}{(p+1)^{k+1}} \\ &= \sum_{j=0}^{m+1} c_{mj}^{(k)} (\log \log y)^j - (\log \log y)^m \sum_{p \mid K} \frac{1}{(p+1)^k} \\ &+ O(d(K) \frac{(\log \log y)^m}{\log y}). \end{aligned}$$

Man überzeugt sich leicht, daß sich auch die Bedingungen für die $P_j^n(K)$ übertragen. Das Restglied überträgt sich nach iii).

Nun können wir Satz 8.1 beweisen.

Beweis von Satz 8.1. Jede natürliche Zahl n läßt sich eindeutig in der Form $n = Km$ mit $K \in \mathcal{A} = \{k \mid k \in \mathbb{N}, p \mid K \Rightarrow p^2 \mid K\}$, $u^2(m) = 1$ und $(m, K) = 1$ schreiben. Wir haben dann

$$\begin{aligned}
 F_1(F_2(n)) &= F_1(F_2(mK)) = F_1(F_2(m)F_2(K)) \\
 &= F_1\left(\prod_{i=1}^r p_i^{s_i} \omega(m) + \beta_i(K) F_2'(K)\right) \\
 &= \prod_{i=1}^r P_i(s_i \omega(m) + \beta_i(K)) \cdot F_1(F_2'(K)).
 \end{aligned}$$

Es ist

$$\begin{aligned}
 F_2'(K) &\leq F_2(K) \ll K^{\alpha_2} \text{ und} \\
 p_i^{\beta_i(K)} &\leq F_2(K) \ll K^{\alpha_2},
 \end{aligned}$$

also

$$\beta_i(K) \ll \log K.$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned}
 F_1(F_2'(K)) \cdot \prod_{i=1}^r P_i(s_i \omega(m) + \beta_i(K)) \\
 = \sum_{l=0}^g a_l(K) \omega^l(m)
 \end{aligned}$$

mit

$$a_l(K) \ll K^{1/2 - \delta}, \quad \delta > 0.$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
 \sum_{\substack{n \leq x \\ K \in \mathcal{A}}} F_1(F_2(n)) &= \sum_{\substack{K \leq x \\ K \in \mathcal{A}}} \sum_{\substack{m \leq x/K \\ (m, K)=1}} u^2(m) \sum_{l=0}^g a_l(K) \omega^l(m) \\
 &= \sum_{l=0}^g \sum_{\substack{K \leq x \\ K \in \mathcal{A}}} a_l(K) T_l\left(\frac{x}{K}, K\right).
 \end{aligned}$$

Diese Summe spalten wir bei $x^{1/2}$ auf. Wegen

$$T_1\left(\frac{x}{K}, K\right) = \sum_{\substack{m \leq x/K \\ (\bar{m}, K)=1}} \mu^2(m) \omega^1(m) \ll \log^1 x \frac{x}{K}$$

und

$$\sum_{\substack{K > x^{1/2} \\ K \in \mathcal{A}}} K^{-1/2 - \delta} \ll x^{-\delta/2}$$

erhalten wir für den zweiten Teil ein $O(x^{1-\varepsilon})$

mit einem $\varepsilon > 0$. In den ersten Teil setzen

wir die Asymptotik für $T_1(y, K)$ ein und erhalten

$$\begin{aligned} & \sum_{l=0}^g \sum_{\substack{K \leq x^{1/2} \\ \bar{K} \in \mathcal{A}}} a_l(K) A_K \frac{x}{K} \left(\sum_{j=0}^l b_{lj}(K) (\log \log \frac{x}{K})^j \right) \\ & + O\left(\frac{(\log \log x/K)^l}{\log x/K} \right), \end{aligned}$$

wobei

$$b_{lj}(K) \ll K^\varepsilon \text{ für jedes } \varepsilon > 0.$$

Nun ist für $K \leq x^{1/2}$

$$\log \log \frac{x}{K} = \log \log x + O\left(\frac{\log K}{\log x}\right),$$

also

$$(\log \log \frac{x}{K})^j = (\log \log x)^j + O\left(\frac{(\log \log x)^{j-1} \log K}{\log x}\right)$$

und wir erhalten schließlich die Behauptung.

Literaturverzeichnis

- 1 P. Erdős, On an elementary proof of some asymptotic formulas in the theory of partitions. Ann. Math. 43 (1942), 434 - 450.
- 2 M.E. Grost, The smallest number with a given number of divisors. Am. Math. Month. 75 (1968), 725 - 729.
- 3 E. Heppner, Die maximale Ordnung primzahl-unabhängiger multiplikativer Funktionen. Arch. Math. 24 (1973), 63 - 65.
- 4 E. Heppner, Über die Iteration von Teilerfunktionen. erscheint im Journ. f. r. u. angew. Math. 1973.
- 5 I. Kátai, On the iteration of the divisor-function. Publ. Math. 16 (1969), 1 - 15.
- 6 G.A. Kolesnik, Improvement of remainder term for the divisors problem. Math. Notes 6 (1969), 784 - 791.
- 7 E. Landau, Neuer Beweis des Primzahlsatzes und Beweis des Primidealsatzes. Math. Ann. 56 (1903), 645 - 670.
- 8 A.G. Postnikov, Einführung in die analytische Zahlentheorie (russisch). Moskau 1971

- 9 K. Prachar, Primzahlverteilung. Berlin -
Göttingen - Heidelberg 1956.
- 10 S. Ramanujan, Highly composite numbers.
Proc. Lond. Math. Soc., Ser. 2 14 (1915),
347 - 409.
- 11 G.J. Rieger, Über einige arithmetische Summen.
Manuscr. Math. 7 (1972), 23 - 34.
- 12 V. Schulze, Die Primteilerdichte von ganz-
zahligen Polynomen. Journ. f. r. u.
angew. Math. 253 (1972), 175 - 185.
- 13 V. Schulze, Die Primteilerdichte von ganz-
zahligen Polynomen II. Journ. f. r.
u. angew. Math. 256 (1972), 153 - 162.
- 14 W. Schwarz und E. Wirsing, The maximal number
of non-isomorphic abelian groups of
order n . Arch. Math. 24 (1973), 59 - 62.
- 15 E.C. Titchmarsh, The theory of the Riemann
zeta-function. Oxford 1951.
- 16 B.A. Venkov, Elementary number theory. Groningen
1970.
- 17 S. Wigert, Sur quelques fonctions arithmétiques.
Acta Math. 37 (1914), 113 - 140.
- 18 E. Wirsing, Das asymptotische Verhalten
von Summen über multiplikative Funktionen.
Math. Ann. 143 (1961), 75 - 102.

Lebenslauf

Ich, Ernst Otto Heppner, bin am 16. Dezember 1948 als Sohn des Lehrers Rudolf Heppner und seiner Ehefrau Irmgard, geb. Uhle, in Offenbach a. M. geboren. Von Ostern 1955 bis Ostern 1959 besuchte ich die Volksschule, Ostern 1959 wurde ich in die Sexta des Leibnizgymnasiums zu Offenbach aufgenommen. Am 14. Juni 1967 bestand ich die Reifeprüfung.

Zur Bundeswehr wurde ich nicht eingezogen.

Vom 5. Oktober 1967 bis zum 12. Juli 1971 studierte ich an der Johann Wolfgang Goethe - Universität die Fächer Mathematik und Physik. Am 10. Juli 1969 habe ich die Diplom - Vorprüfung, am 12. Juli 1971 die Diplom - Hauptprüfung für Studierende der Mathematik mit sehr gut bestanden.

Innerhalb der Mathematik interessierte ich mich vor allem für Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie. Meine Diplomarbeit ("Verallgemeinerung eines Ergebnisses von C. Hooley über die Anzahl der Teiler eines quadratischen Polynoms") und meine Dissertation ("Über primzahl-unabhängige multiplikative Funktionen") beschäftigen sich ebenso wie zwei Veröffentlichungen ("Die maximale Ordnung primzahl-unabhängiger multiplikativer Funktionen")

und "Über die Iteration von Teilerfunktionen")
mit Themen aus der Zahlentheorie.

Vom 1. April 1970 bis zum 31. August 1971 war
ich wissenschaftliche Hilfskraft an der Universität
Frankfurt. Seit dem 1. September 1971 bin ich
Assistent von Prof. Dr. Th. Schneider an der
Universität Freiburg (Vom 1.9.71 bis 30.6.72 Verw.
einer wiss. Assistentenstelle, seit dem 1.7.72
wiss. Angest.).

Meine akademischen Lehrer waren
Prof. Dr. F.-W. Bauer, Prof. Dr. E.-A. Behrens,
Prof. Dr. M. Czerny, Prof. Dr. H. Dänzer, Prof.
Dr. H. Dinges, Prof. Dr. B. Fischer, Prof. Dr.
W. Franz, Prof. Dr. W. Greiner, Prof. Dr. R.
Moufang, Prof. Dr. H.-J. Queisser, Prof. Dr.
W. Schwarz, Prof. Dr. F. Stummel.

